الوحدة الاولى

الاعداد والعمليات عليها

البنود

١-٥ الى ١-٧

القيمة المطلقة
Absolute Value

سوف تتعلم

- حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة
- حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

دعنا نفكر ونتناقش

عرفت سابقًا أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي **بُعد هذا العدد عن الصفر على خط أعداد.** ولمّا كان البعد عددًا موجبًا، فالقيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب هي معكوسه الجمعي. الرمز المستخدم للقيمة المطلقة للعدد س هو |س|.

تعريف:

لكل عدد حقيقي س يكون:

$$|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س > ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } س = ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \end{cases}$$

معلومة:

(-س) ليس بالضرورة عددًا سالبًا. (-س) هو المعكوس الجمعي للعدد س.

نلاحظ أن العدد إذا كان موجبًا أو صفرًا فإن قيمته المطلقة تساويه، أما إذا كان العدد سالبًا فإن قيمته المطلقة تساوي معكوسه الجمعي.

بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب ∈ ح

١) $|أ| \geq ٠$

٢) $|-أ| = |أ|$

٣) $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$

٤) $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$، حيث ب ≠ ٠

٥) $|أ| \geq أ$

٦) $|أ - ب| = |ب - أ|$

مثال (١)

أعد تعريف |س - ٤| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

الحل:

$$|س - ٤| = \begin{cases} س - ٤ & \text{حيث } س - ٤ > ٠ \\ ٠ & \text{حيث } س - ٤ = ٠ \\ -(س - ٤) & \text{حيث } س - ٤ < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س - ٤ : & س \geq ٤ \\ ٤ - س : & س < ٤ \end{cases}$$

حاول أن تحل ص ٢٨

١) أعد تعريف كلّ مما يلي دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

أ) $|س + ٣| = \begin{cases} س + ٣ & س \geq -٣ \\ -س - ٣ & س < -٣ \end{cases}$

ب) $|٤ - ٢س| = \begin{cases} ٤ - ٢س & س \leq ٢ \\ ٢س - ٤ & س > ٢ \end{cases}$

ص ٢٩

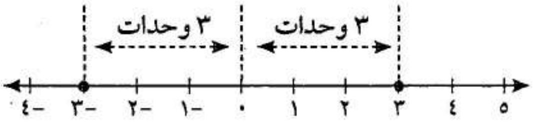
حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن استخدام خط أعداد لحل معادلات تتضمن قيمة مطلقة.

يبيّن التمثيل البياني المقابل حلول المعادلة |س| = ٣.

حيث المسافة بين س، صفر تساوي ٣ وحدات

إذًا الحل: س = ٣ أو س = -٣



نتيجة

① إذا كان أ عددًا حقيقيًّا موجبًا فإن حل المعادلة |س| = أ هو: س = أ أو س = -أ وتكون مجموعة الحل {-أ، أ}.

② إذا كان أ عددًا حقيقيًّا سالبًا فإن المعادلة |س| = أ مجموعة حلها ∅

معلومة مفيدة:

المجموعة الخالية نعبر عنها بأحد الرمزين { } أو ∅

مثال (٢)

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢ص - ٣| = ٧، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: |٢ص - ٣| = ٧

٢ص - ٣ = ٧	أو	٢ص - ٣ = -٧	قيمة ٢ص - ٣ يمكن أن تكون ٧ أو -٧.
٢ص = ١٠		٢ص = -٤	إضافة +٣ إلى طرفي المعادلة.
ص = ٥		ص = -٢	قسمة كل طرف على ٢.

مجموعة الحل = {-٢، ٥}

تحقق: عندما ص = ٥	وعندما ص = -٢
|٢ص - ٣| = ٧	|٢ص - ٣| = ٧
|٢(٥) - ٣| = ٧	|٢(-٢) - ٣| = ٧
|٧| = ٧ ✓	|-٧| = ٧ ✓

حاول أن تحل ص ٢٩

② أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين، ثم تحقق من صحة الحل.

أ |٥س + ٣| = ٨

ب |٢س - ١| = ٠

(أ) ٥س + ٣ = ٨ أو ٥س + ٣ = -٨
٥س = ٥ | ٥س = -١١
س = ١ | س = -١١/٥
مجموعة الحل = {١، -١١/٥}

(ب) ٢س - ١ = ٠
٢س = ١
س = ١/٢
م.ح = {١/٢}

عند حل مسائل متعددة الخطوات، ابدأ بوضع التعبير الذي يتضمن القيمة المطلقة في طرف واحد.

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢س + ١| + ٣ = ٠

الحل: |٢س + ١| + ٣ = ٠

|٢س + ١| = −٣

وحيث إن −٣ < ٠ (عدد سالب)

∴ مجموعة الحل = $\varnothing$

حاول أن تحل ص ٣٠

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة: ٥ + |−٢س + ٤| = ٠

|−٢س + ٤| = −٥
−٥ < ٠ عدد سالب
مجموعة الحل = $\varnothing$

مثال (٤)

أوجد مجموعة حل المعادلة ٤|٢س + ٣| − ٥ = ١١

الحل: ٤|٢س + ٣| − ٥ = ١١

٤|٢س + ٣| = ١٦ إضافة ٥ إلى طرفي المعادلة

|٢س + ٣| = ٤ قسمة كل طرف على ٤

٢س + ٣ = ٤ أو ٢س + ٣ = −٤

٢س = ١ | ٢س = −٧ إضافة −٣ إلى طرفي المعادلة

س = $\frac{١}{٢}$ | س = $\frac{−٧}{٢}$ قسمة كل طرف على ٢

مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٢}، \frac{−٧}{٢}\right\}$

حاول أن تحل ص ٣٦

٤ أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلتين:

أ ٣|٢س + ٤| −٦ = ٠

٣|٢س + ٤| = ٦
|٢س + ٤| = ٢
٢س + ٤ = ٢ أو ٢س + ٤ = −٢
٢س = −٢ | ٢س = −٦
س = −١ | س = −٣
م.ح = {−١، −٣}

ب |٥س − ٤| + ٣ = ٠

|٥س − ٤| = −٣
−٣ < ٠ عدد سالب
م.ح = $\varnothing$

حاول أن تحل

(٥) م.ح |س − ٥| = |٢س + ٣|

المساواة: س − ٥ = ٢س + ٣ أو س − ٥ = −٢س − ٣

س − ٢س = ٣ + ٥ س + ٢س = ٥ − ٣

−س = ٨ ٣س = ٢

س = −٨ س = $\frac{٢}{٣}$

م.ح = {−٨ ، $\frac{٢}{٣}$}

تربيع الطرفين:

(س − ٥)^{٢} = (٢س + ٣)^{٢}

س^{٢} − ١٠س + ٢٥ = ٤س^{٢} + ١٢س + ٩

س^{٢} − ٤س^{٢} − ١٠س − ١٢س + ٢٥ − ٩ = ٠

−٣س^{٢} − ٢٢س + ١٦ = ٠

٣س^{٢} + ٢٢س − ١٦ = ٠

(٣س − ٢)(س + ٨) = ٠

٣س − ٢ = ٠ أو س + ٨ = ٠

س = $\frac{٢}{٣}$ س = −٨

م.ح = {−٨ ، $\frac{٢}{٣}$}

تابع ص ٣٤ حاول أن تحل

رقم ٥ ب

(ب) |س − ٥| = |س − ٧|

المساواة: س − ٥ = س − ٧ أو س − ٥ = −س + ٧

س − س = ٥ − ٧ س + س = ٧ + ٥

٠ = −٢ ٢س = ١٢

مرفوض س = ٦

م . ح = {٦}.

تربيع الطرفين:

(س − ٥)^2 = (س − ٧)^2

س^2 − ١٠س + ٢٥ = س^2 − ١٤س + ٤٩

−١٠س + ١٤س + ٢٥ − ٤٩ = ٠

٤س − ٢٤ = ٠

٤س = ٢٤ س = ٦

م . ح = {٦}.

ص ٣٤

حاول أن تحل

٦ أوجد مجموعة حل المعادلة: |٤س − ١| = س + ٢.

س + ٢ ≥ ٠ س ≥ −٢

٤س − ١ = س + ٢ ٤س − ١ = −س − ٢

٣س = ٣ ٥س = −١

س = ١ س = $-\frac{1}{5}$

١ ∈ (−٢، ∞) ∈ (−٢، ∞)

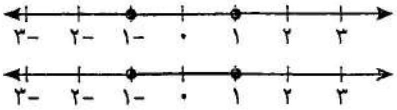
م . ح = {١، $-\frac{1}{5}$}

حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن أيضًا حل متباينات تتضمن قيمًا مطلقة باستخدام خط أعداد.

يبيّن التمثيل البياني الأول حلول المتباينة |س| ≥ ١.

يبيّن التمثيل البياني الثاني حلول المتباينة |س| ≤ ١.



تذكر:
|س| ≤ ١ تعني أن بعد س عن الصفر هو أصغر من أو يساوي ١.

تعميم

ليكن أ عددًا حقيقيًا موجبًا.

(١) |س| ≤ أ تكافئ -أ ≤ س ≤ أ

(٢) |س| ≥ أ تكافئ س ≥ أ أو س ≤ -أ

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة ٤|٢س + ١| + ٤ ≤ ١٢، ومثّل مجموعة الحل على خط أعداد.

الحل: ٤|٢س + ١| + ٤ ≤ ١٢

٤|٢س + ١| ≤ ٨	إضافة (-٤) إلى طرفي المعادلة
|٢س + ١| ≤ ٢	قسمة كل طرف على ٤
-٢ ≤ ٢س + ١ ≤ ٢	كتابة المتباينة المكافئة
-٣ ≤ ٢س ≤ ١	إضافة (-١)
$\frac{-٣}{٢}$ ≤ س ≤ $\frac{١}{٢}$	القسمة على ٢

مجموعة الحل = $\left[-\frac{٣}{٢} ، \frac{١}{٢}\right]$

حاول أن تحل ص ٣٣

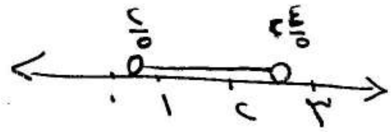
(٧) أوجد مجموعة حل المتباينة |$\frac{١}{٢}$ س - $\frac{٤}{٥}$| < ٠,٦ ومثّل مجموعة الحل على خط أعداد.

-٠,٦ < $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{٤}{٥}$ < ٠,٦ اضافة ٠,٨ للطرفين

٠,٢ < ٠,٥ س < ١,٤ القسمة على ٠,٥

$\frac{٢}{٥}$ < س < $\frac{١٤}{٥}$

م.ح = ($\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١٤}{٥}$)



مثال (٨)

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥، ومثّل الحل على خط أعداد.

الحل: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥

٢|٣م − ٤| > ٦	إضافة ١ إلى طرفي المتباينة
|٣م − ٤| > ٣	قسمة كل طرف على ٢
٣م − ٤ > ٣ أو ٣م − ٤ > −٣	كتابة المتباينة المكافئة
٣م > ٧ ، ٣م > ١	بسِّط
م > $\frac{٧}{٣}$ ، م > $\frac{١}{٣}$	قسمة كل طرف على ٣

مجموعة الحل = $\left(\frac{٧}{٣}، \infty\right) \cup \left(-\infty، \frac{١}{٣}\right)$

−٢ −١ ٠ $\frac{١}{٣}$ ١ ٢ $\frac{٧}{٣}$

حاول أن تحل ص ٣٤

٨ أوجد مجموعة حل المتباينة: |$\frac{٣}{٤}$ − س| ≤ $\frac{٧}{٨}$ ومثّل الحل على خط أعداد.

$\frac{٣}{٤}$ − س ≤ $\frac{٧}{٨}$ أو $\frac{٣}{٤}$ − س ≥ $\frac{٧}{٨}$

س ≥ $\frac{-١}{٨}$ س ≤ $\frac{١٣}{٨}$

$\frac{-١}{٨}$ $\frac{١٣}{٨}$ $\frac{٧}{٨}$

−١ ١ ٢

م.ح = $(-\infty، \frac{-١}{٨}] \cup [\frac{١٣}{٨}، \infty)$

مثال (٩) تطبيقات حياتية

رياضة: يبلغ طول قطر دائرة مرمى كرة السلة ٤٥ سم مع هامش خطأ لا يزيد على ١ سم.

أ اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن قطر دائرة مرمى تحقق هذا الشرط.

ب أوجد قيم طول القطر المقبولة ومثّلها على خط أعداد.

الحل:

ليكن س طول قطر دائرة مرمى كرة سلة، وحيث إن س لا يزيد أو ينقص عن ٤٥ سم بأكثر من ١ سم، فإن قيم س تحقق |س − ٤٥| ≤ ١.

−١ ≤ س − ٤٥ ≤ ١

٤٤ ≤ س ≤ ٤٦

مجموعة الحل = [٤٤، ٤٦] أي أن قيم طول القطر المقبولة تنتمي إلى [٤٤، ٤٦]

٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧

حاول أن تحل ص ٣٤

٩ درجة حموضة عصير الطماطم هي ٤ مع هامش سماح ٠,٢. اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن درجات الحموضة المقبولة. وحلها ثم بيّن الحل على خط أعداد.

|س − ٤| ≤ ٠,٢ م.ح = [٣,٨، ٤,٢]

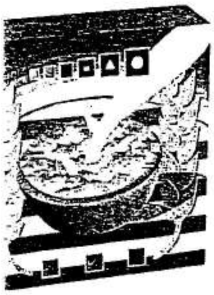
−٠,٢ ≤ س − ٤ ≤ ٠,٢

٣,٨ ≤ س ≤ ٤,٢

−١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٣,٨ ٤,٢

ص ٣٥

مثال (١٠) تطبيقات حياتية



يبلغ وزن عبوة رقائق الذرة ٤٥٠ جرامًا. يختار مراقب الجودة بعض العبوات للتحقق من زنتها. تلغى كل علبة يزيد الفرق بين وزنها ووزن عبوة الذرة عن ٥ جم.
اكتب متباينة تبيّن أوزان العبوات غير المقبولة ومثّل الحل على خط أعداد.

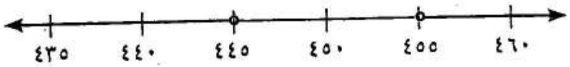
الحل:

لتكن س وزن العبوة. العبوات غير المقبولة هي التي يزيد وزنها أو يقل عن الوزن المبين بأكثر من ٥ جم.

أي |س − ٤٥٠| > ٥

س − ٤٥٠ > ٥ أو س − ٤٥٠ < −٥

س > ٤٥٥ أو س < ٤٤٥



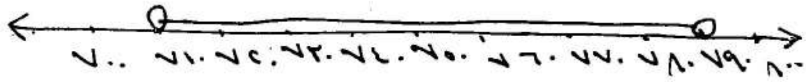
حاول أن تحل ص ٣٥

(١٠) يعرض أحد المحلات المثلجات في عبوات تزن ٧٥٠ جرامًا. عند التحقق من الوزن تقبل العبوات التي يقل الفرق وزنها ووزن العبوة المعتمد عن ٤٠ جرامًا.
اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تبيّن أوزان العبوات المقبولة ومثّل الحل على خط أعداد.

|س − ٧٥٠| < ٤٠

−٤٠ < س − ٧٥٠ < ٤٠

٧١٠ < س < ٧٩٠ ح.م (٧١٠ ، ٧٩٠)



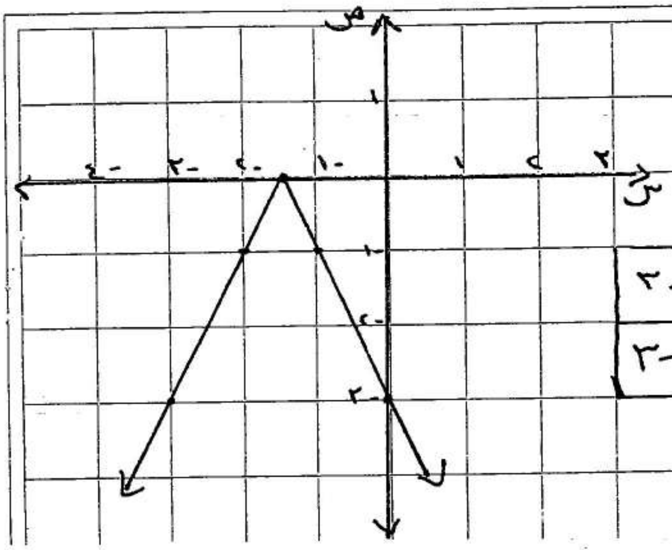
١ - ٥ دالة القيمة المطلقة

حاول أن تحل ص ٣٦

١ ارسم بيانيًا الدلة: ص = -|٢س + ٣|.

① ص = - |٢ س + ٣|

رأس المنحنى (-١,٥ ، ٠)



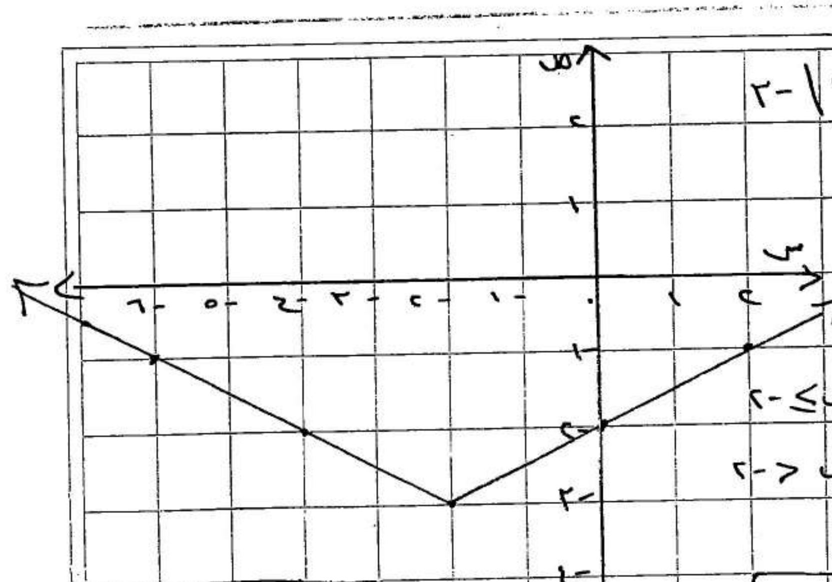
س	٠	-١	-١,٥	-٢	-٣
ص	-٣	-١	٠	-١	-٣

حاول أن تحل ص ٣٧

٢ ارسم بيانيًا الدالة: ص = $\left|\frac{1}{2}\right.$ س + ١$\left.\right|$ - ٣ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

② ص = $\left|\frac{1}{2}\right.$ س + ١$\left.\right|$ - ٣

ص = { $\frac{1}{2}$ س - ٢ ، س ≥ -٢ ؛ - $\frac{1}{2}$ س - ٤ ، س < -٢ }



س	-٢	٠	٢
ص	-٣	-٢	-١

ص = $\frac{1}{2}$ س - ٢ س ≥ -٢

س	-٤	-٦
ص	-٢	-١

ص = - $\frac{1}{2}$ س - ٤ س < -٢

ص ٣٨

س − ٧ = ٢س + ٤	أو	س − ٧ = −٢س − ٤
٢س − س = −٧ − ٤		س + ٢س = ٧ − ٤
س = −١١ مرفوضة، لماذا؟		٣س = ٣
		س = ١

يبعد منزل إبراهيم ١ كم عن الدوّار لجهة المكتبة العامة.

حاول أن تحل ص ٣٨

(٣) في مثال (٣)، ناقش حل المسألة إذا كانت المكتبة العامة تبعد ٤ كم عن الدوّار.

|٤ − س| = |٢س + ١٢|

|٤ − س| = |٢س + ٤|

٤ − س = ٢س + ٤ أو ٤ − س = −٢س − ٤

٣س = ٠ س = −٨ مرفوض

س = ٠ يقع منزل ابراهيم عند الدوار

رسم بيان دوال المطلق باستخدام بعض التحويلات الهندسية ص ٣٨

Graph of Absolute Value Functions Using some Geometric Transformations

سوف نستخدم الإزاحة (الانسحاب) أفقيًا أو رأسيًا أو الاثنين معًا في رسم بعض دوال القيمة المطلقة.

مثال (٤)

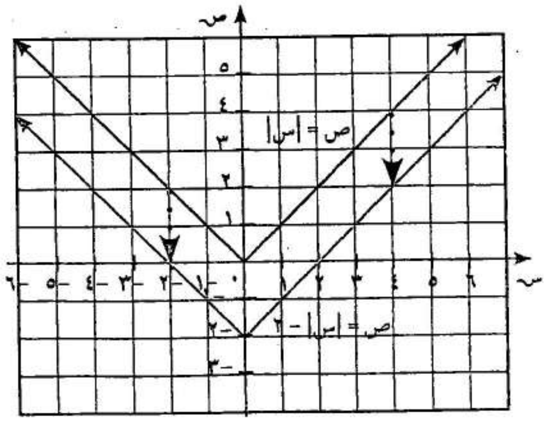
ارسم بيان كل من الدالتين: ص = |س|، ص = |س| − ٢.

صف كيف يرتبط الرسم البياني للدالة ص = |س| −٢ بالرسم البياني للدالة ص = |س|.

الحل:

اصنع جدول قيم، ثم ارسم بيانيًا.

س	ص = |س|	ص = |س| −٢
−٤	٤	٢
−٢	٢	٠
٠	٠	−٢
٢	٢	٠
٤	٤	٢



لكل قيمة للمتغير س، تكون قيمة ص = |س| −٢ أصغر بـ ٢ من قيمة ص = |س|.

الرسم البياني لِـ ص = |س| −٢ هو صورة للرسم البياني لِـ ص = |س| بعدِ إزاحته وحدتين إلى أسفل.

ص ٢٩

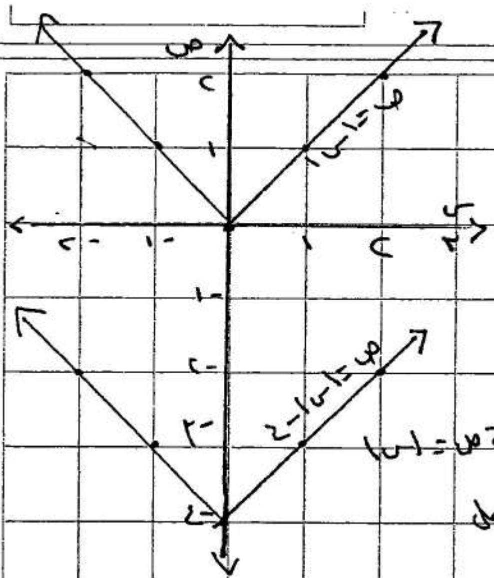
حاول أن تحل

٤ لكل زوج من الدوال، قارن بين الرسمين البيانيين. صف كيف يتم الانتقال من الرسم البياني الأول إلى الثاني.

أ ص = |س|، ص = |س| − ٤

ب ص = −|س|، ص = −|س| + ٣

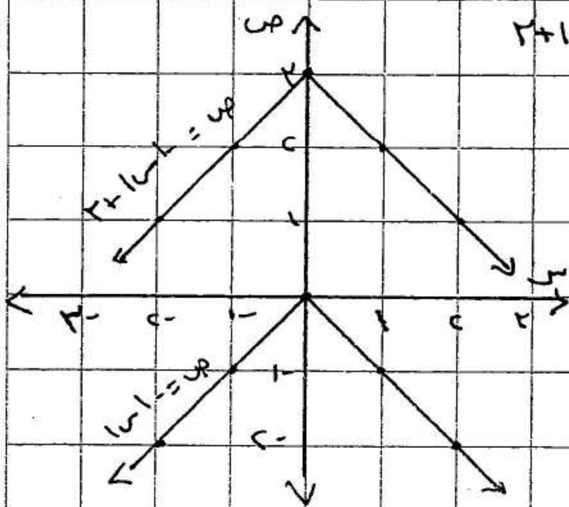
(أ) ص = |س| ، ص = |س| − ٤



س	ص = |س|	ص = |س| − ٤
٠	٠	−٤
١	١	−٣
٢	٢	−٢
−١	١	−٣
−٢	٢	−٢

أزاح الرسم البياني للدالة ص = |س| أربع وحدات لأسفل

(ب) ص = −|س| ، ص = −|س| + ٣



س	ص = −|س|	ص = −|س| + ٣
٠	٠	٣
١	−١	٢
٢	−٢	١
−١	−١	٢
−٢	−٢	١

أزاح الرسم البياني للدالة ص = −|س| ثلاث وحدات لأعلى

حاول أن تحل

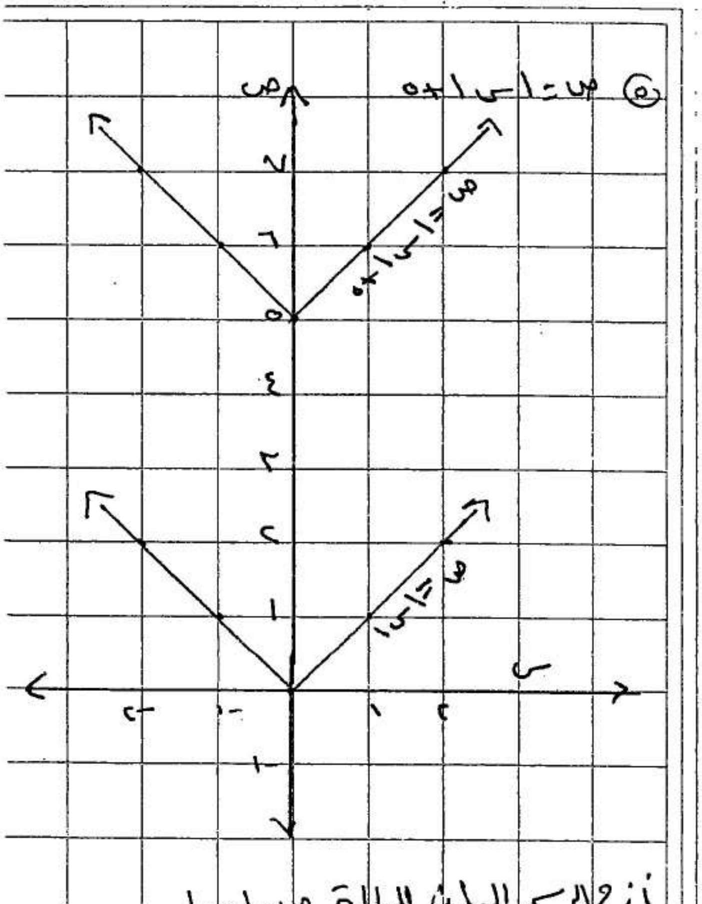
ص ٤٠

٥ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = |س| + ٥.

ملاحظة: يمكنك عمل جدول للقيم وتحديد بعض النقاط للتحقق من صحة الرسم.

يتشارك الانسحاب الأفقي مع الانسحاب الرأسي ببعض الخصائص.

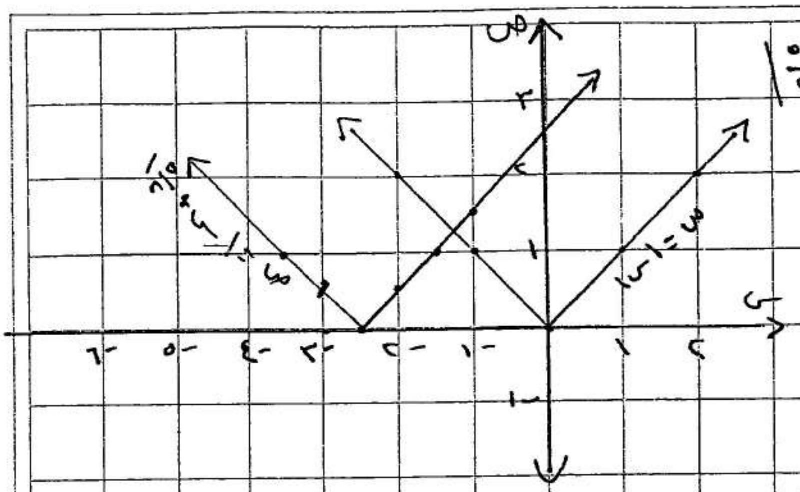
الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| (حيث ل عدد حقيقي موجب) هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار. كذلك الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = |س| ، ل وحدة إلى جهة اليمين.



أزاح الرسم البياني للدالة ص = |س|
خمس وحدات لأعلى

حاول أن تحل

(٦) استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = |س + $\frac{٥}{٢}$| .



(٦) ص = |س + $\frac{٥}{٢}$|

أزح رسم ص = |س| وحدتان ونصف وحدة إلى اليسار

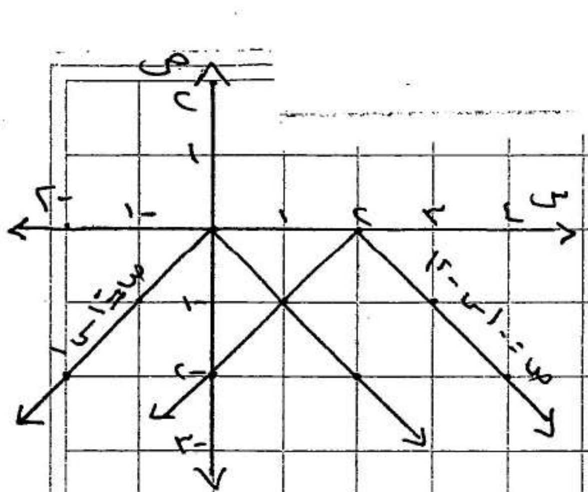
حاول أن تحل

ص ٤١

(٧) لكلّ من الدالتين، حدد دالة المرجع وقيمة مسافة الانسحاب ل، ثم ارسم بيانيًا كل دالة مستخدمًا الانسحاب.

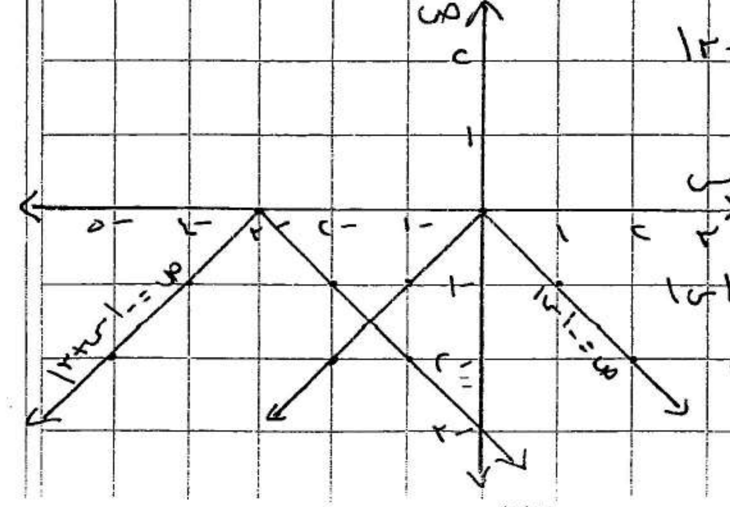
أ ص = − |س − ٢| .

ب ص = − |س + ٣| .



أ) ص = − |س − ٢|

أزح رسم الدالة ص = −|س| وحدتان إلى اليمين .



ب) ص = − |س + ٣|

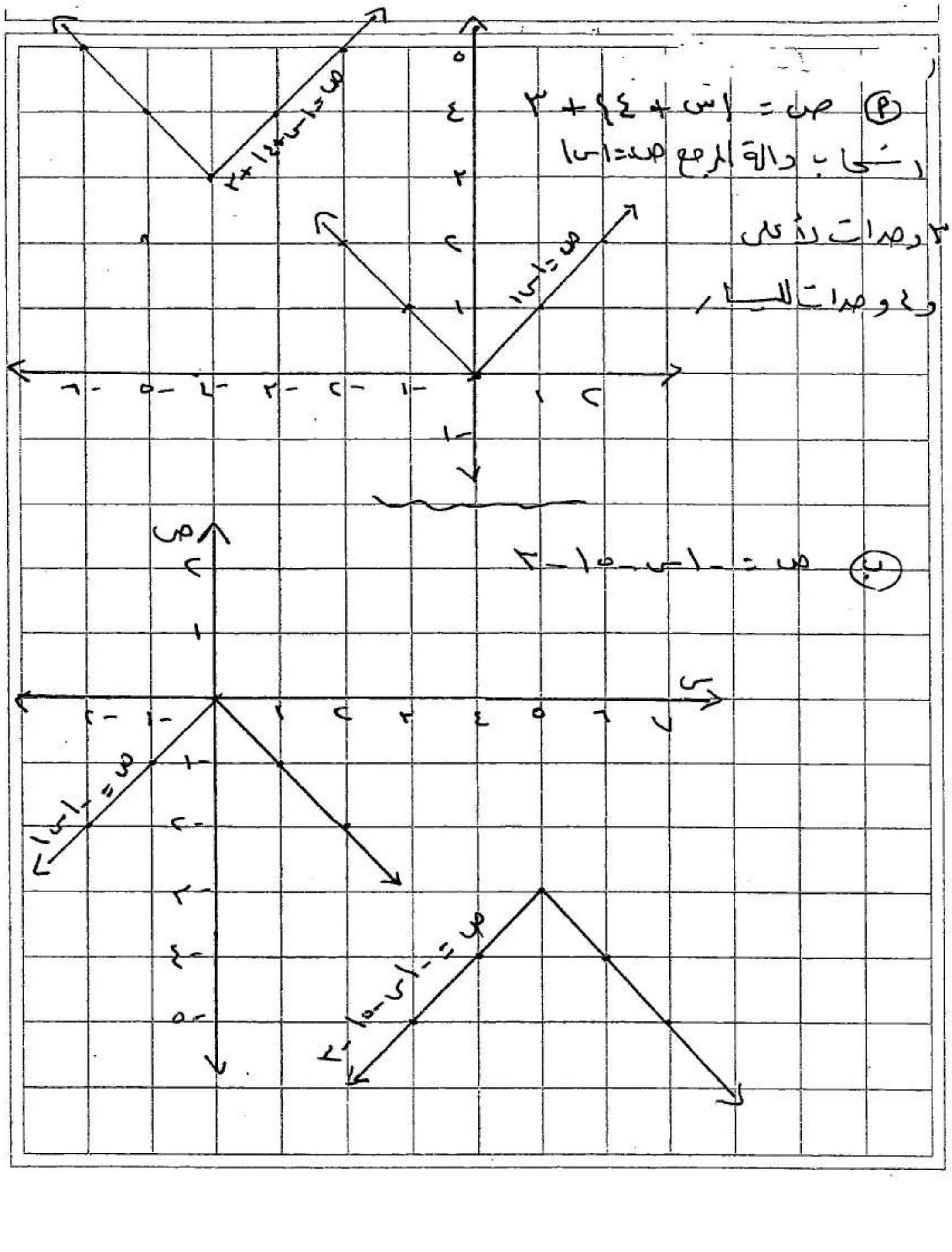
أزح رسم الدالة ص = −|س| ثلاث وحدات لليسار

حاول أن تحل ص ٤٢

٨ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة:

أ ص = |س + ٤| + ٣

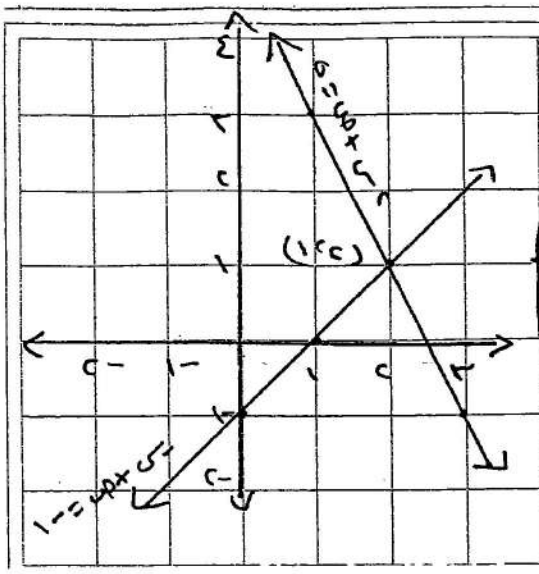
ب ص = -|س - ٥| - ٣



ص ٤٤

حاول أن تحل

(١) أوجد مجموعة حل النظام { ٢س + ص = ٥ ، -س + ص = -١ } بيانيًا وتحقق من الحل.



① { ٢س + ص = ٥
-س + ص = -١

٢س + ص = ٥

س	١	٢	٣
ص	٣	١	-١

-س + ص = -١

س	٠	١	٢
ص	-١	٠	١

٢×٢ + ١ = ٥ ، -٢ + ١ = -١

٥ = ٥ ، -١ = -١

م.ح = {(٢، ١)}

ص ٥٣ ص ٤٥

حاول أن تحل

(٢) استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام { ٢س + ٣ص = ١١ ، -٢س + ٤ص = ١٠ }

٢س + ٣ص = ١١ ①
-٢س + ٤ص = ١٠ ②
بالجمع
٧ص = ٢١
$\boxed{\text{ص} = ٣}$ بالتعويض في ①
٢س + ٩ = ١١
$\boxed{\text{س} = ١}$
مجموعة الحل = {(١، ٣)}

٢س + ٣ص = ٣ اختر إحدى المعادلتين .

٢(٣) + ٣ص = ٣ عوّض عن س بـ ٣ في المعادلة (١)

٦ + ٣ص = ٣

٣ص = -٣

ص = -١

مجموعة الحل = {(٣، -١)}

٢م + ٣ل = ١٢

بضرب ② في ٣

١٥م - ٣ل = ٣٩ بالجمع

١٧م = ٥١

$\boxed{\text{م} = ٣}$ بالتعويض في ①

٦ + ٣ل = ١٢

$\boxed{\text{ل} = ٢}$

م.ح = {(٣، ٢)}

حاول أن تحل ص ٤٦

(٣) استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام { ٢م + ٣ل = ١٢ ① ، ٥م - ل = ١٣ ②

يمكن أيضًا حل نظام معادلتين جبريًّا بطريقة التعويض.

حدّد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوّض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

مثال (٤)

استخدم طريقة التعويض لإيجاد مجموعة حل النظام { ٣س - ص = ١ ، ٣س - ٢ص = ٥ .

الحل: في المعادلة الأولى (تم اختيارها لأنها أسهل)، حدّد قيمة ص بدلالة س.

٣س - ص = ١

ص = ٣س - ١

في المعادلة الثانية عوّض عن ص بقيمتها:

٣س - ٢(٣س - ١) = ٥

٣س - ٦س + ٢ = ٥ بسّط

-٣س = ٣

س = -١

عوّض عن س بـ (-١) في ص = ٣س - ١

ص = ٣(-١) - ١

ص = -٤

مجموعة الحل: {(-١؛ -٤)}

بالتعويض عن ت في المعادلة الثانية

٥ر - ٤(٢ر + ٣) = ٦

٥ر - ٨ر - ١٢ = ٦

-٣ر = ١٨

$\boxed{\text{ر} = -٦}$

ت = ٢ × -٦ + ٣

$\boxed{\text{ت} = -٩}$

م.ح = {(-٦، -٩)}

حاول أن تحل ص ٤٦

(٤) أوجد مجموعة حل النظام { ت = ٢ر + ٣ ، ٥ر - ٤ت = ٦ مستخدمًا طريقة التعويض.

ص ٤٧

مثال (٥) تطبيقات حياتية

دفع محمد ٢,٨٠٠ دينار ثمن ٦ أكواب شاي وقطعتي حلوى، ودفع سالم في المكان نفسه ٥,٢٠٠ دنانير ثمن كوبين من الشاي و٦ قطع حلوى. ما سعر كوب الشاي وما سعر قطعة الحلوى؟

الحل:

ليكن ش سعر كوب الشاي، حـ سعر قطعة الحلوى

محمد	٦ أكواب شاي	و	قطعتا حلوى	دفع	٢,٨٠٠ دينار
	٦ × ش	+	٢ × حـ	=	٢,٨٠٠ =
سالم	كوبان من الشاي	و	٦ قطع حلوى	دفع	٥,٢٠٠ دنانير
	٢ × ش	+	٦ × حـ	=	٥,٢٠٠ =

لمعرفة الأسعار نحل النظام: { ٦ش + ٢حـ = ٢,٨٠٠
٢ش + ٦حـ = ٥,٢٠٠

باستخدام أي من الطرائق التي سبق عرضها نحصل على: ش = ٠,٢٠٠ ، حـ = ٠,٨٠٠ .

أي أن سعر كوب الشاي = ٠,٢٠٠ دينار، وسعر قطعة الحلوى = ٠,٨٠٠ دينار.

حاول أن تحل ص ٤٧

٥ وزعت ٦ كجم من المربى في ١٤ عبوة، بعض العبوات يحتوي على ٥٠٠ جم وبعضها الآخر على ٣٧٥ جم. ما عدد العبوات من كل نوع؟

س عدد العبوات التي تحتوي ٥٠٠ جم
ص عدد العبوات التي تحتوي ٣٧٥ جم
س + ص = ١٤   س = ١٤ - ص
٥٠٠ س + ٣٧٥ ص = ٦٠٠٠   بالتعويض عن قيمة س
٥٠٠ × (١٤ - ص) + ٣٧٥ ص = ٦٠٠٠
٧٠٠٠ - ٥٠٠ ص + ٣٧٥ ص = ٦٠٠٠
-١٢٥ ص = -١٠٠٠   ص = ٨
س = ١٤ - ٨
س = ٦
عدد العبوات التي تحتوي ٥٠٠ جم = ٦ عبوات
عدد العبوات التي تحتوي ٣٧٥ جم = ٨ عبوات

١ - ٧

حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد ص ٤٨

بإضافة ٢٥ إلى طرفي المعادلة نجد أن:

$$\text{س}^2 + 10\text{س} + 25 = -16 + 25$$

$$(\text{س} + 5)^2 = 25 - 16$$

$$(\text{س} + 5)^2 = 9$$

$$\text{س} + 5 = \pm 3$$

$\text{س} = -5 \pm 3$ أي $\text{س} = -2$ أو $\text{س} = -8$ مجموعة الحل: $\{-2, -8\}$.

حاول أن تحل ص ٤٩

① حلّ المعادلة: $\text{س}^2 - 8\text{س} = -15$ بإكمال المربع.

إضافة ١٦ للطرفين

$$\text{س}^2 - 8\text{س} + 16 = 16 - 15$$

$$(\text{س} - 4)^2 = 1$$

$$\text{س} - 4 = \mp 1$$

$\text{س} = ٥$ أو $\text{س} = ٣$ م.ح = $\{٥، ٣\}$

٢- استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد ص ٤٩

Solving Quadratic Equations by Using the Quadratic Formula

تستخدم طريقة إكمال المربع لاستنتاج قانون عام لحل أي معادلة من الدرجة الثانية على الصورة: $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = 0$، وذلك بأخذ مثال عددي: حلّ المعادلة: $2\text{س}^2 + 6\text{س} + 1 = 0$

المثال العددي:

$$2\text{س}^2 + 6\text{س} + 1 = 0$$

$$\text{س}^2 + \frac{6}{2}\text{س} + \frac{1}{2} = 0$$ بالقسمة على ٢. لماذا؟

$$\text{س}^2 + 3\text{س} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{س}^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right)\text{س} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$\left(\text{س} + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\left(\text{س} + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$\text{س} + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$\text{س} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$$

الصورة العامة:

$$\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = 0$$

$$\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = 0$$ بالقسمة على أ حيث أ ≠ ٠

$$\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$$

$$\text{س}^2 + 2\left(\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)\text{س} + \left(\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$$

$$\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 = \frac{\text{ب}^2}{(2\text{أ})^2} - \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$$

$$\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 = \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}{4\text{أ}^2}$$

$$\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} = \pm\sqrt{\frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}{4\text{أ}^2}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}}{2\text{أ}}$$

من ذلك نستنتج أن:

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:

حلّ المعادلة: $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = 0$، حيث أ ≠ ٠ هو: $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}}{2\text{أ}}$

حاول أن تحل ص ٥٠

(٢) باستخدام القانون، أوجد مجموعة حل المعادلة:

(أ) س^٢ − ٦س + ٥ = ٠ (ب) س(س − ٢) = ٧

---

(٢) (أ) س^٢ − ٦س + ٥ = ٠

أ = ١ ب = −٦ جـ = ٥

ب^٢ − ٤ أ جـ = (−٦)^٢ − ٤ × ١ × ٥ = ١٦

$$س = \frac{-ب \mp \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{+٦ \mp \sqrt{١٦}}{٢ \times ١}$$

$$س = \frac{٦ + ٤}{٢} = ٥ \quad \text{أو} \quad س = \frac{٦ - ٤}{٢} = ١$$

م.ح = {٥ ، ١}

(ب) س(س − ٢) = ٧

س^٢ − ٢س − ٧ = ٠

أ = ١ ب = −٢ جـ = −٧

ب^٢ − ٤ أ جـ = (−٢)^٢ − ٤ × ١ × −٧ = ٣٢

$$س = \frac{-ب \mp \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٢ \mp \sqrt{٣٢}}{٢ \times ١}$$

$$س = \frac{٢ + \sqrt{٣٢}}{٢} = ٣,٨٣ \quad \text{أو} \quad س = \frac{٢ - \sqrt{٣٢}}{٢} = -١,٨٣$$

م.ح = {٣,٨٣ ، −١,٨٣}

حاول أن تحل ص ٥٩

(٣) أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $٤س^٢ = ١٣س - ٩$

$٤س^٢ - ١٣س + ٩ = ٠$

أ = ٤ ، ب = -١٣ ، جـ = ٩

$ب^٢ - ٤أجـ = (-١٣)^٢ - ٤ \times ٤ \times ٩ = ٢٥$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{١٣ \pm \sqrt{٢٥}}{٢ \times ٤}$

س = ١ أو س = $\frac{٩}{٤}$

م.ح = $\{١ ، \frac{٩}{٤}\}$.

حاول أن تحل ص ٥٢

(٤) قذفت رصاصة عموديًّا إلى أعلى بسرعة ٤٠ مترًا/ ثانية. أوجد الزمن (ن ثانية) الذي تستغرقه الرصاصة كي تصل إلى ارتفاع ٨٠ مترًا علمًا أن العلاقة بين الزمن (ن) والارتفاع (ف) والسرعة (ع) هي:

ف = $-٥ن^٢ + ع ن$، ع = السرعة بالمتر/ ث.

$-٥ن^٢ + ٤٠ن - ٨٠ = ٠$

أ = -٥ ، ب = ٤٠ ، جـ = -٨٠

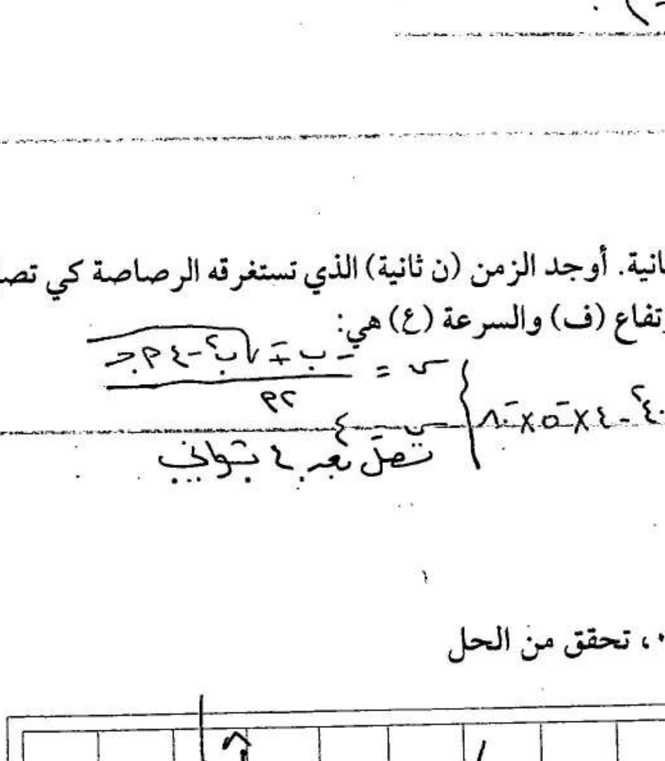
$ب^٢ - ٤أجـ = ٤٠^٢ - ٤ \times -٥ \times -٨٠$ = صفر

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

س = ٤ تصل بعد ٤ ثواني

حاول أن تحل ص ٥٣

(٥) أوجد نوع جذري المعادلة: $٢س^٢ - ٥س + ٢ = ٠$، تحقق من الحل جبريًّا وبيانيًّا.



$٢س^٢ - ٥س + ٢ = ٠$

أ = ٢ ، ب = -٥ ، جـ = ٢

$\Delta = ب^٢ - ٤أجـ$

$\Delta = (-٥)^٢ - ٤ \times ٢ \times ٢ = ٩$

يوجد جذران حقيقيان مختلفان

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ} = \frac{+٥ \pm \sqrt{٩}}{٢ \times ٢}$

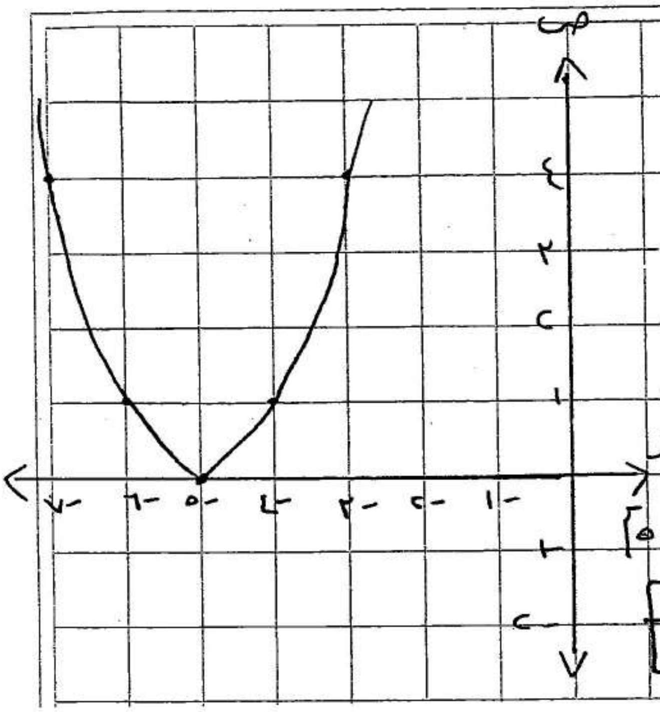
س = ٢ أو س = $\frac{١}{٢}$

س	٢	$\frac{١}{٢}$	٠	١	٣
ص	٠	٠	٢	-١	٥

م.ح = $\{٢ ، \frac{١}{٢}\}$

حاول أن تحل ص٥٣

٦ أوجد نوع جذري المعادلة: $س^2 + ١٠س + ٢٥ = ٠$، تحقق من الحل بيانيًا.



٦ $س^2 + ١٠س + ٢٥ = ٠$

أ = ١ ، ب = ١٠ ، جـ = ٢٥

$\Delta = ب^2 - ٤ أ جـ$

$\Delta = ١٠^2 - ٤ × ١ × ٢٥ =$ صفر

يوجد جذران حقيقيان متساويان

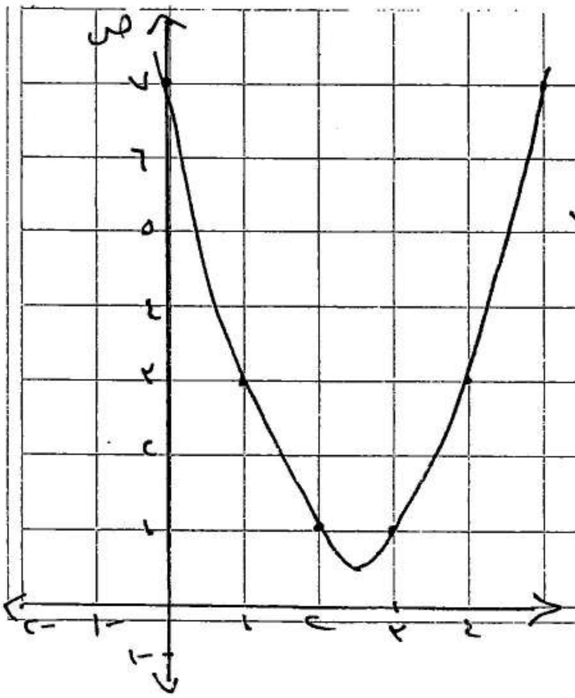
$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ} = \frac{-١٠ \pm \sqrt{صفر}}{٢ × ١}$

س = −٥ ، م.ح = {−٥}

س	−٥	−٤	−٣	−٦	−٧
ص	٠	١	٤	١	٤

حاول أن تحل ص٥٤

٧ أوجد نوع جذري المعادلة: $س^2 - ٥س + ٧ = ٠$، وتحقق من الحل بيانيًا.



٧ $س^2 - ٥س + ٧ = ٠$

أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٧

$\Delta = ب^2 - ٤أجـ = (-٥)^2 - ٤ × ١ × ٧$

$\Delta = -٣$ سالب

يوجد جذران غير حقيقيان

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	٧	٣	١	١	٣

ص٥٥

حاول أن تحل

(٨) بدون حلّ المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: ٤س^{٢} − ٩س + ٣ = ٠ إذا وجدا.

أ = ٤ ب = −٩ جـ = ٣

Δ = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (−٩)^{٢} − ٤ × ٤ × ٣ = ٣٣

يوجد جذران حقيقيان مختلفان

مجموع الجذرين م + ن = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{٩}{٤}$

ناتج ضرب الجذرين = م ن = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٣}{٤}$

ص٥٦

حاول أن تحل

(٩) إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة: أس^{٢} − ٥س + ٢ = ٠ يساوي $\frac{٢}{٣}$. فأوجد أ، ثم حلّ المعادلة.

حاصل ضرب الجذرين م ن = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٢}{أ}$ = $\frac{٢}{٣}$ $\boxed{أ = ٣}$

Δ = (−٥)^{٢} − ٤ × ٣ × ٢ = ١

س = $\frac{-ب \mp \sqrt{Δ}}{٢أ}$ = $\frac{٥ \mp \sqrt{١}}{٢ × ٣}$

الجذران هما: ١ ، $\frac{٢}{٣}$

ص٥٧

حاول أن تحل

١٠ إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠ هما ل، م فكوّن معادلة تربيعية جذراها ٢ل، ٢م.

م + ل = $\frac{-ب}{أ}$ = ٥ مجموع الجذرات = ٢ل + ٢م = ٢(ل + م) = ٢ × ٥ = ١٠

م ل = $\frac{جـ}{أ}$ = ٦ ناتج ضرب الجذرات = ٢ل × ٢م = ٤ ل م = ٤ × ٦ = ٢٤

المعادلة هي: س^{٢} − ١٠س + ٢٤ = ٠

ص٥٧

حاول أن تحل

١١ أوجد معادلتين تربيعيتين جذرا كل منهما: −٤، −٣.

م + ت = −٧ م ت = ١٢

* س^{٢} + ٧س + ١٢ = ٠ ، * ٢(س^{٢} + ٧س + ١٢) = ٠