الوحدة الثانية

حساب المثلثات

((ملخص لأهم قوانين الوحدة الثانية))

- العلاقة $\frac{هـ^د}{\pi} = \frac{س^\circ}{180}$ تربط بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.
- في المثلث القائم الزاوية جيب الزاوية = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ ويرمز له جا أو sin
- جيب تمام الزاوية = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$ ويرمز له جتا أو cos
- قا أ = $\frac{1}{\text{جتا أ}}$ حيث جتا أ $\neq$. ، قتا أ = $\frac{1}{\text{جا أ}}$ جا أ $\neq$.
- ظل الزاوية = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$ ويرمز له ظا أو tan
- ظتا أ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الضلع المقابل}}$.
- طول القوس ل = هـ^د × نق
- مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ × جا أ
- مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ هـ^د نق^2 .
- مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 (هـ^د − جا هـ^د) .
- زاوية الارتفاع : إذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي .
- زاوية الانخفاض : إذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي .

٢ - ١ الزوايا وقياسها

حاول أن تحل ص٦٤

١ اكتب كلًّا مما يلي بالقياس الستيني.

أ $\frac{٧}{٣٢}$ الزاوية القائمة $١٩^\circ \; ٤١' \; ١٥''$

ب ٠,٦٢٥ الزاوية القائمة $٥٦^\circ \; ١٥'$

حاول أن تحل ص٦٤

٢ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٣}{٧}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني؟ $٧٧^\circ \; ٨' \; ٣٤,٢٩''$

حاول أن تحل ص٦٦

٣ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم. أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها

أ $١,٢^د$ ل = هـ^د × نق = ١,٢ × ٦ = ٧,٢ سم

ب $(١,٥٧)^د$ ل = ١,٥٧ × ٦ = ٩,٤٢ سم

حاول أن تحل ص٦٦

٥ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها:

أ ٤٥° $\frac{\pi}{٤}$ ب ٣٠٠° $\frac{٥}{٣}\pi$ ج ٢٢٥° $\frac{٥}{٤}\pi$ د ١٥٠° $\frac{٥}{٦}\pi$

٦ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\frac{٥}{٨} \times \pi = ١١٢,٥^\circ$ ب $٠,٧٥^د = ٤٢,٩٧^\circ$ ج $٣,٣٥ = ١٩١,٩٤^\circ$ د $\frac{\pi}{٥} = ٣٦^\circ$

٧ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\frac{\pi}{٢} = ٩٠^\circ$ ب $\frac{\pi}{٣} = ٦٠^\circ$ ج $\frac{\pi}{٦} = ٣٠^\circ$ د $\frac{\pi}{٤} = ٤٥^\circ$

حاول أن تحل ص٦٧

٧ حدّد الزوايا الربعية من بين الزوايا التالية: π، ٢٥٠°، $\frac{٥\pi}{٧}$، $-\frac{\pi}{٢}$، ٣٣٠°.

زاوية ربعية زاوية ربعية

حاول أن تحل

٨ زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها نق، تحصر قوسًا طوله ل. أوجد طول القوس في الحالتين:

أ هـ^د = $\frac{١}{٤}\pi$، نق = ٧ سم ل = هـ^د × نق = $\frac{١}{٤}\pi \times ٧ \simeq ٥,٤٩٨$ سم

ب س° = ١٢٠°، نق = ٢٤ سم ل = $\frac{١٢٠ \times \pi}{١٨٠} \times ٢٤ \simeq ٥٠,٢٦٥$ سم

النسب المثلثية

٢ - ٢

ص ٧٩

حاول أن تحل

٩) في مثال (١٠) ما قياس الزاوية م ق م٢ بالقياس الدائري وبالقياس الستيني إذا قطعت النقطة م مسافة ٤٥٠٠ كم؟

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{٤٥٠٠}{٦٤٠٠} = \frac{٤٥}{٦٤} \simeq ٠,٧٠٣^{د}$

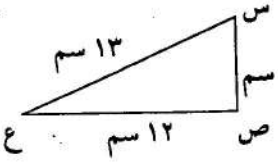
$س^{\circ} = ٠,٧٠٣ \times \frac{١٨٠}{\pi} \simeq ٤٠^{\circ}\ ١٦'\ ٤٤''$

ص ٧٠

حاول أن تحل

$(س ص)^2 + (ص ع)^2 = ٥^2 + ١٢^2 = ١٦٩$

$(س ع)^2 = ١٣^2 = ١٦٩$



١) أ أثبت أن المثلث س ص ع قائم في صَ. المثلث قائم الزاوية في صَ

ب أوجد جاس، جاع. جاس = $\frac{مقابل}{وتر} = \frac{١٢}{١٣}$ ، جاع = $\frac{٥}{١٣}$

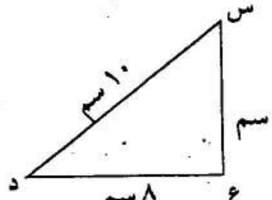
ص ٧١

حاول أن تحل

$(س ع)^2 + (ع د)^2 = ٦^2 + ٨^2 = ١٠٠$

$(س د)^2 = ١٠^2 = ١٠٠$

مثلث قائم الزاوية في ع



٢) أ أثبت أن المثلث س ع د قائم الزاوية في ع.

ب أوجد كلًّا من: جا(سَ)، جتا(سَ)، جا(دَ)، جتا(دَ).

ج ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين سَ، دَ.

جاس = $\frac{٨}{١٠}$ ، جتاس = $\frac{٦}{١٠}$ ، جاد = $\frac{٦}{١٠}$ ، جتاد = $\frac{٨}{١٠}$ نلاحظ جاس = جتاد

جتاس = جاد

$(أب)^2 + (ب ج)^2 = ٧^2 + ٢٤^2 = ٦٢٥$

$(أج)^2 = ٦٢٥$

∴ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب

جاأ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ جاج = $\frac{٧}{٢٥}$

جتاأ = $\frac{٧}{٢٥}$ جتاج = $\frac{٢٤}{٢٥}$

قاأ = $\frac{٢٥}{٧}$ قاج = $\frac{٢٥}{٢٤}$

قتاأ = $\frac{٢٥}{٢٤}$ قتاج = $\frac{٢٥}{٧}$

ص ٧٢

~~ص ٨٣~~ **حاول أن تحل**

٣) أب ج مثلث فيه: أب = ٧ سم، ب ج = ٢٤ سم، أج = ٢٥ سم.

أثبت أن $\triangle$أب ج قائم الزاوية، ثم أوجد جاأ، جتاأ، قاأ، قتاأ، جاج، جتاج، قاج، قتاج.

حاول أن تحل ص ٨٣   جتا$(٤٣^{\circ}) = \frac{ص}{١٠}$

ص = ١٠ × جتا ٤٣ ≃ ٧,٣١ سم تقريباً

٤) أوجد ص في المثال (٤).

ص ٧٣

كان نيكولاي كوبرنيك Nicolaus Copernicus (١٤٧٣م - ١٥٤٣م) عالمًا رياضيًّا وفلكيًّا، درس الطب وألمّ بمعظم العلوم في عصره. يعتبر أول من صاغ نظرية مركزية الشمس وأن الأرض جرم يدور في فلكها.

يعتبر كوبرنيك مؤسس الفلك الحديث.

وحدة الفلك (و.ف أو AU) تمثل متوسط المسافة بين الأرض والشمس وهي تساوي تقريبًا ١٤٩٦٠٠٠٠٠ كم.

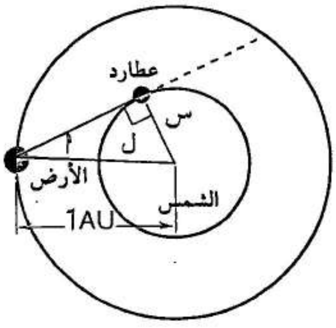
هل تعلم؟

١ ميل ≃ ١,٦٠٩ كم

مثال (٥) **تطبيقات حياتية**

في الشكل المقابل، إذا كان ق($\hat{أ}$) = ٢٢,٣°،

أوجد بعد كوكب عطارد عن الشمس علمًا بأن بعد الأرض عن الشمس يساوي ١ وحدة الفلك ١AU.



الحل:

بفرض أن : س = بعد كوكب عطارد عن الشمس.

ل = بعد الأرض عن الشمس

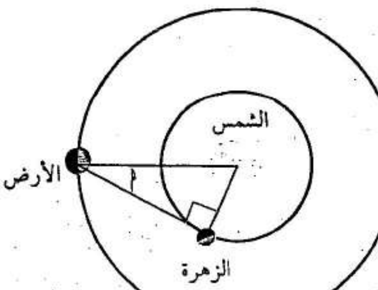
فيكون:

جا (٢٢,٣°) = $\frac{س}{ل}$.

∴ بعد عطارد عن الشمس = س= ل × جا (٢٢,٣°) .

≈ ١ × ٠,٣٨ ≈ ٠,٣٨ AU

حاول أن تحل ص ٧٢



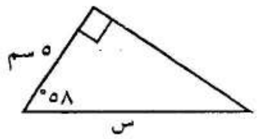
٥ أ كما في التطبيق السابق، أوجد بعد كوكب الزهرة عن الشمس علمًا بأن ق($\hat{أ}$) = ٤٦,١°

جا ٤٦,١ = $\frac{س}{١}$ س = ١ × جا٤٦,١

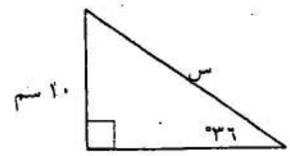
= ٠,٧٢ ل

ب أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

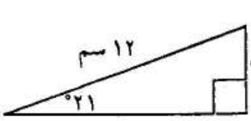
أ



ب



ج



أ: جتا ٥٨° = $\frac{٥}{س}$

س = $\frac{٥}{جتا ٥٨}$ = ٩,٤٤ سم

ب: جا ٣٦° = $\frac{١٠}{س}$

س = $\frac{١٠}{جا ٣٦}$ = ١٧,٠١ سم

ج: جا ٢١ = $\frac{س}{١٢}$

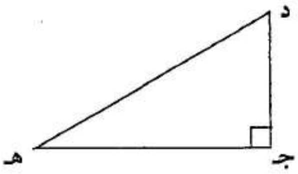
س = ١٢ × جا٢١

س = ٤,٣ سم

ص ٧٤

٥ إيجاد قياس زاوية علم جيبها او جيب تمامها

قد تعلّم جيب زاوية أو جيب تمامها وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تستخدم لذلك النسب المثلثية العكسية ويرمز إليها بـ جا$^{-1}$ أو جتا$^{-1}$. تبيّن العلاقة التالية الترابط بين النسب المثلثية والنسب المثلثية العكسيّة:



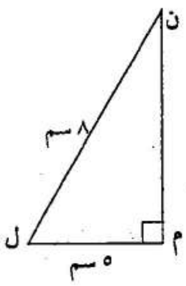
- إذا كان جاد = ص فإن جا$^{-1}$ ص = د
  جتاد = س فإن جتا$^{-1}$ س = د
- غالبًا ما تستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياسات هذه الزوايا.
  ننقر على Sin Shift للتعبير عن جا$^{-1}$
  وننقر على Cos Shift للتعبير عن جتا$^{-1}$.

مثال (٦)

في الشكل المقابل، احسب ق($\hat{ل}$) لأقرب درجة.

الحل:

جتا ل = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$.



جتا ل = $\frac{٥}{٨}$ باستخدام النسب المثلثية لجيب التمام

ق($\hat{ل}$) = جتا$^{-1}$ $\frac{٥}{٨}$ جتا$^{-1}$ تسمى النسبة المثلثية العكسية لـ جتا

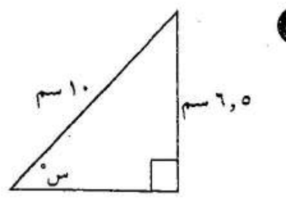
shift Cos (5 ÷ 8) =

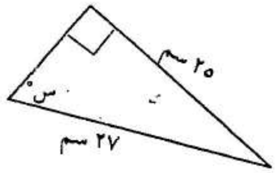
يظهر 51.317813

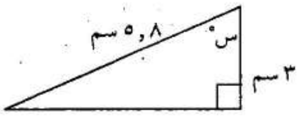
وبالتالي ق($\hat{ل}$) ≃ ٥١°

حاول أن تحل ص ٧٤

٦ أوجد قيمة س° لأقرب درجة.

أ


ب


جـ


جا س = $\frac{٦,٥}{١٠}$
س = ٤٠,٥°

جا س = $\frac{٢٥}{٢٧}$
س = ٦٧,٨°

جتا س = $\frac{٣}{٥,٨}$
س = ٥٨,٩°

ظل الزاوية ومقلوبه ص ٧٥

Tangent and Cotangent of an Angle

سوف تتعلم

- ما هو ظل الزاوية
- إيجاد قياس الزاوية إذا علم ظلها
- مقلوب ظل الزاوية
- حل المثلث قائم الزاوية

عمل تعاوني

سنعمل في مجموعات صغيرة، نختار مجموعة قياسات الزوايا
(١٠°، ٢٠°، ٣٠°، ...، ٨٠°)

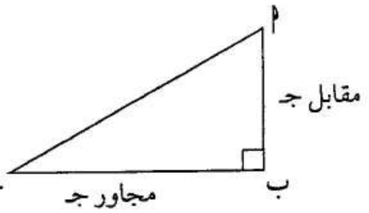
كل طالب في مجموعته يرسم مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب، ويختار إحدى الزوايا من المثلث بحيث تنتمي إلى مجموعة قياسات الزوايا. يحسب كل طالب أطوال أضلاع المثلث باستخدام المسطرة لأقرب ملليمتر، ويستخدم الآلة الحاسبة في حساب النسب:

$\frac{\text{مقابل الزاوية جـ}}{\text{المجاور للزاوية جـ}}$ لأقرب رقمين عشريين

في المثلث قائم الزاوية نسبة طول الضلع المقابل لزاوية حادة إلى طول الضلع المجاور للزاوية نفسها تسمى ظل الزاوية ونر إليها بالرمز ظاجـ وبالإنكليزية Tangent (tan).

أي أن ظل الزاوية = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

مثلًا في الشكل المقابل طاجـ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$

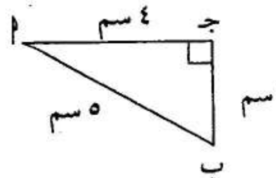


قارن بين ظا ١٠°، ظا ٢٠°، ظا ٣٠°، ظا ٤٠°، ... ماذا تستنتج؟

من العمل التعاوني السابق، يتبيّن أن قيمة ظاجـ تزداد كلما زاد قياس الزاوية جـ بين ٠°، ٩٠°.

مثال (١)

في الشكل المقابل أوجد ظل الزاوية أ، ظل الزاوية ب.

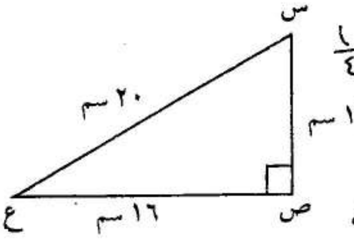


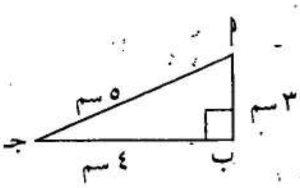
الحل: ظاأ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٣}{٤}$

ظاب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٣}$

حاول أن تحل ص٧٥

$\frac{\text{ب ص}}{\text{س ص}} = \frac{١}{٤}$ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}} = \frac{١}{٤}$ $\frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}} = \frac{١}{٤}$





١ **أ** استعن بالمثلثين المجاورين في إيجاد:

$\frac{\text{أب}}{\text{س ص}}$، $\frac{\text{أجـ}}{\text{س ع}}$، $\frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}}$. ماذا تستنتج؟ يتشابه المثلثان

ب هل ظاس = ظاأ، ظاع = ظاجـ؟ ماذا تستنتج؟ نعم

جـ هل هذا صحيح بالنسبة إلى النسب: جاس، جاأ وكذلك جتاس، جتاأ؟ ماذا تستنتج؟

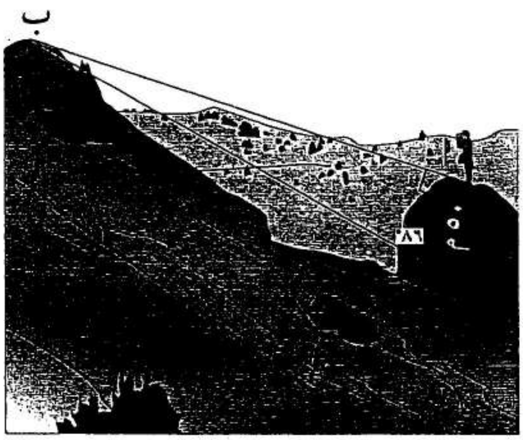
نعم في المثلثات المتشابهة النسب المثلثية متساوية

مثال (٢) تطبيقات حياتية

أراد أحد أعضاء فريق الكشافة قياس المسافة بين قمتي جبلين، فوقف على قمة أحد الجبلين عند النقطة ﺃ وحدّد علامة مميزة أمامه على قمة الجبل الآخر ولتكن ب، ثم اتبع التالي:

1. وضع مؤشر البوصلة باتجاه العلامة المميزة ب وحدّد قراءة المؤشر.
2. سار مسافة ٥٠ مترًا على خط مستقيم عمودي على الخط المستقيم الواصل بين القمتين.
3. وضع مؤشر البوصلة مرة ثانية في اتجاه العلامة المميزة وحدّد قراءة المؤشر.
4. باستخدام قراءتي المؤشر وجد أن: ق(جـ) = ٨٦°.

استخدم ظل الزاوية في حساب المسافة بين قمتي الجبلين عند النقطة التي بدأ منها القياس.



الحل: باستخدام ظل الزاوية

$$ظا(٨٦°) = \frac{ﺃب}{٥٠}$$

$$ﺃب = ٥٠ \times ظا\ (٨٦°)$$

تستخدم الآلة الحاسبة

50 × TAN 86 =

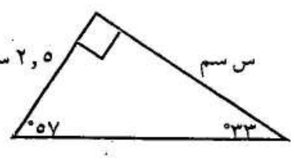
يظهر 715.03331

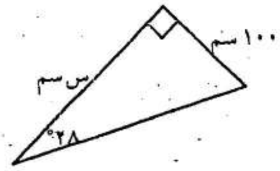
إذًا، المسافة بين قمتي الجبلين هي ٧١٥ مترًا تقريبًا.

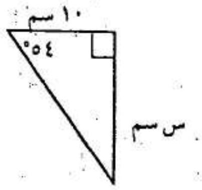
حاول أن تحل

ص ٧٦

2. أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

ﺃ


ب


جـ


$ظا ٣٣° = \frac{٢,٥}{س}$ ، $س = \frac{٢,٥}{ظا ٣٣} = ٣,٨$

$ظا ٢٨° = \frac{١٠٠}{س}$ ، $س = \frac{١٠٠}{ظا ٢٨} = ١٨٨,١$

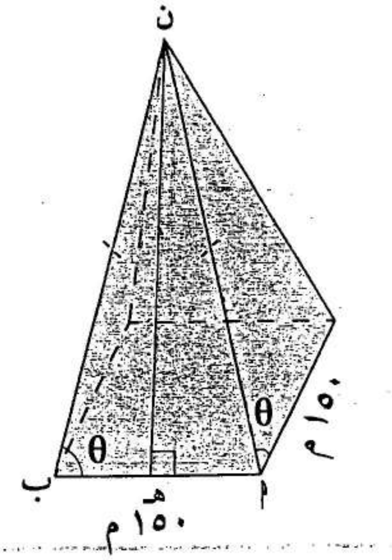
$ظا ٥٤° = \frac{س}{١٠}$ ، $س = ١٠ ظا ٥٤ = ١٣,٨$

ص ٧٧

مثال (٣)

الهرم المقابل قاعدته مربعة الشكل. أوجد طول ارتفاعه المائل ل إذا كان قياس الزاوية θ يساوي ٦٠°.

الحل:



في Δن ا ب المتطابق الضلعين

$\overline{ن هـ} \perp \overline{اب}$

$\therefore$ هـ ا = هـ ب = ٧٥ م

في Δن هـ ب القائم الزاوية هـ

ظا $\theta = \frac{ل}{٧٥}$

ظا ٦٠° $= \frac{ل}{٧٥}$

ل = ٧٥ × ظا ٦٠° $\simeq$ ١٣٠ مترًا.

طول الارتفاع المائل $\simeq$ ١٣٠ مترًا.

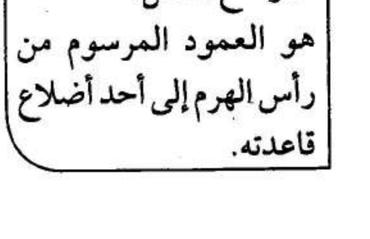
تذكر:
الارتفاع المائل:
هو العمود المرسوم من رأس الهرم إلى أحد أضلاع قاعدته.

١ - إيجاد قياس زاوية إذا علم ظلها: Finding the Measure of an Angle Knowing its Tangent

قد تعلم ظل الزاوية وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تستخدم لذلك النسبة المثلثية العكسية ويرمز لها بالرمز ظا$^{-1}$ والعلاقة التالية تبين الترابط بين النسبة المثلثية والنسبة المثلثية العكسية. إذا كان ظا θ = س فإن ظا$^{-1}$س = θ.

مثال (٤)

في الشكل المقابل أوجد ق(سَ) في Δس ص ع.



الحل:

ظاس = $\frac{٦}{٨}$ = ٠,٧٥ $\therefore$ ق(سَ) = ظا$^{-1}$ (٠,٧٥)

حيث ظا$^{-1}$ تعني النسب المثلثية العكسية للظل.

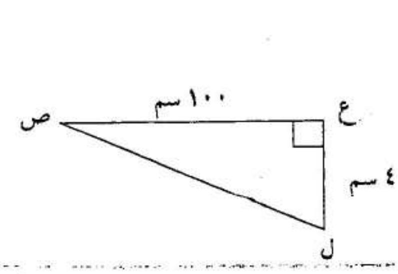
لإيجاد ق(سَ) تستخدم الآلة الحاسبة.

Shift TAN 0.75 =

يظهر 36.86989765 يظهر 36° 52′ 11.63″

إذًا ق(سَ) $\simeq$ ٣٦° ٥٢′ ١٢″.

حاول أن تحل ص ٧٧

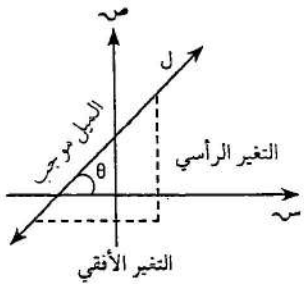


٣ أوجد ق(سَ) حيث ظاس = ٠,٥ م(سَ) $\simeq$ ٢٦° ٣٣′ ٥٤″

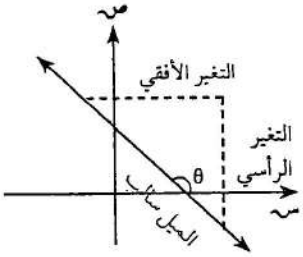
٤ في الشكل المقابل، أوجد ق(لَ) لأقرب درجة.

ظا ل = $\frac{١٠٠}{٤١}$ م(ل) = ٦٨° تقريبًا

إذا كان المستقيم ل يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن θ تسمى زاوية ميل المستقيم ويكون ظاθ = ميل المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

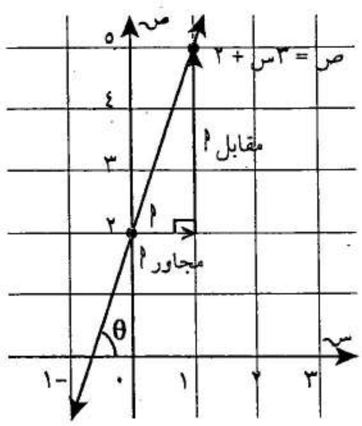


إذا كانت معادلة المستقيم: ص = م س + ب فإن ميل المستقيم = م.



مثال (٥)

في الشكل المقابل: احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التي يصنعها المستقيم ص = ٣س + ٢ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



الحل:

من الشكل ق($\hat{\theta}$) = ق($\hat{٩}$) . زاويتان متناظرتان.

ظا٩ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{١} = ٣$ ق($\hat{٩}$) = ظا$^{-١}$ ٣

Shift TAN ٣ =

يظهر 71.565051 ... يظهر 71° 33′ 54.18″

ق($\hat{٩}$) ≃ ٧١° ٣٣′ ٥٤″

حاول أن تحل

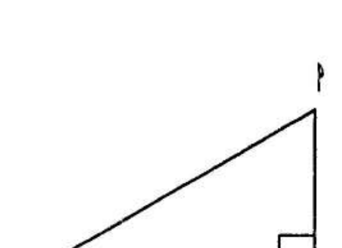
ظاθ = $\frac{١}{٤}$ ∴ θ = ١٤° ٢′ ١٠٫٤٨″ ٧٨

(٥) احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم ص = $\frac{١}{٤}$ س + ٦ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

٢- مقلوب ظل الزاوية (ظتا): Cotangent (cot)

مقلوب ظل الزاوية ٩ = $\frac{١}{\text{ظا٩}}$ ويسمى ظل تمام الزاوية ٩ ويرمز إليه بالرمز ظتا٩ وبالإنكليزية Cotangent (cot).

ظتا٩ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{٩ب}}{\text{ب جـ}}$

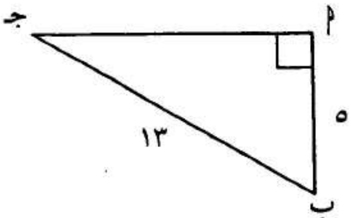


ويكون ظتا٩ = $\frac{١}{\text{ظا٩}}$: ظا٩ ≠ ٠

ظا٩ × ظتا٩ = ١

ص ٧٩

مثال (٦)



في الشكل المقابل أوجد ظاجـ، ظتاجـ.

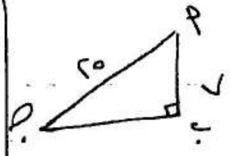
الحل:

من نظرية فيثاغورث $(\text{مجـ})^{٢} = (١٣)^{٢} - (٥)^{٢} = ١٤٤$،

مجـ = ١٢

ظاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٥}{١٢}$ ، ظتاجـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{١٢}{٥}$

ملاحظة:
عند عدم ذكر وحدة الطول في رسم الأشكال يمكنك اعتبار أي وحدة طول.



$(\text{ب ج})^{٢} = ٢٥^{٢} - ٧^{٢} = ٥٧٦$

ب ج = ٢٤ سم

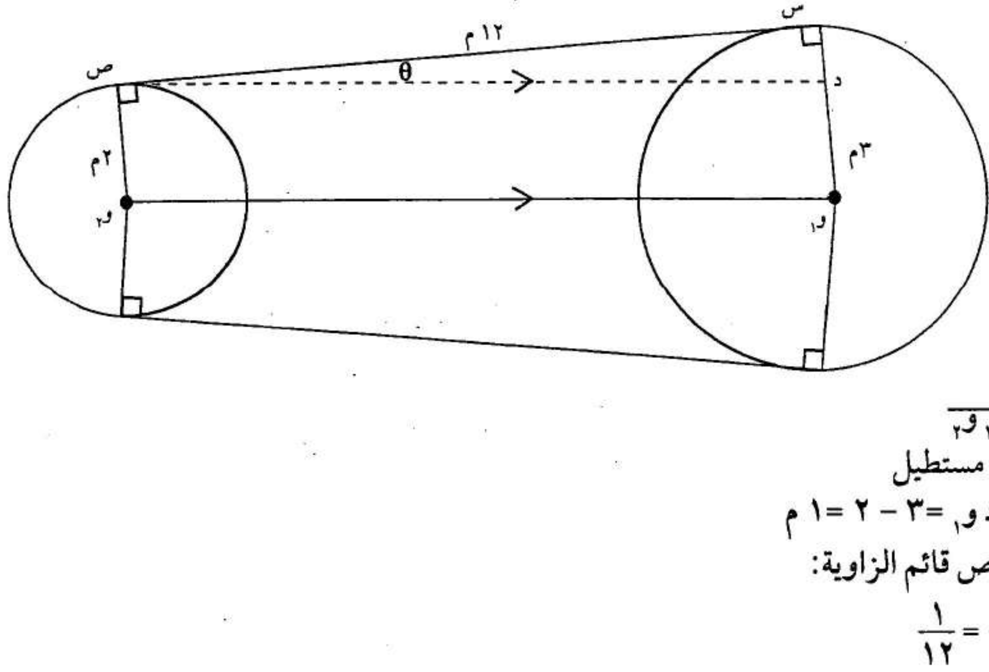
حاول أن تحل ٧٩ص

٦ م ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه م ب = ٧ سم، م جـ = ٢٥ سم. أوجد: ظاجـ، ظتاجـ.

ظا ج = $\frac{٧}{٢٤}$ ، ظتا ج = $\frac{٢٤}{٧}$

مثال (٧)

يلتف حزام حول بكرتين أسطوانتي الشكل. طول نصف قطر البكرة الكبرى ٣ م وطول نصف قطر الصغرى ٢ م.
نريد معرفة قياس الزاوية θ التي يصنعها الحزام مع المستقيم المار بمركزي الدائرتين.



الحل:

نرسم $\overline{\text{د ص}} \parallel \overline{و_١ و_٢}$

الشكل د$و_١و_٢$ص مستطيل

س د = س $و_١$ - د $و_١$ = ٣ - ٢ = ١ م

في المثلث د س ص قائم الزاوية:

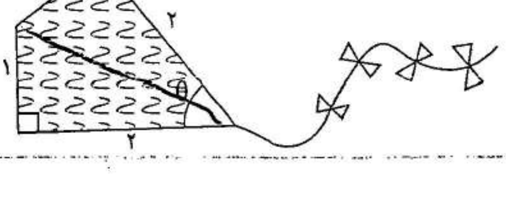
ظاθ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{١}{١٢}$

ق(θ) = ظا$^{-١}\left(\frac{١}{١٢}\right)$ = $4°45'49.11''$

قياس الزاوية θ يساوي ″٤٥ ′٤٥ °٤ تقريبًا.

ظا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ظا$^{-١}$$\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٢٧° تقريبًا

ق θ = ٥٤° تقريبًا



حاول أن تحل ٧٩ص

٧ بيّن الشكل المقابل طائرة ورقية. أوجد قياس الزاوية θ.