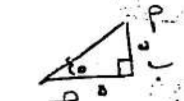
الوحدة الثانية

حساب المثلثات

((ملخص لأهم قوانين الوحدة الثانية))

- العلاقة $\frac{\text{هـ}^{د}}{\pi} = \frac{\text{س}^{\circ}}{١٨٠}$ تربط بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية
- في المثلث القائم الزاوية جيب الزاوية = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ ويرمز له جا أو sin
- جيب تمام الزاوية = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$ ويرمز له جتا أو cos
- قا أ = $\frac{1}{\text{جتا أ}}$ حيث جتا أ ≠ ٠ ، قتا أ = $\frac{1}{\text{جا أ}}$ جا أ ≠ ٠ .
- ظل الزاوية = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$ ويرمز له ظا أو tan
- ظتا أ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الضلع المقابل}}$.
- طول القوس ل = هـ^{د} × نق
- مساحة المثلث أ ب ج = $\frac{1}{2}$ أ ب × أ ج × جا أ
- مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ هـ^{د} نق^{2} .
- مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{2} (هـ^{د} − جا هـ^{د}) .
- زاوية الارتفاع : اذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي .
- زاوية الانخفاض : اذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي .

ص ٨١



ظا ٤٥ = $\frac{ب م}{م جـ} = \frac{٥}{م جـ} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

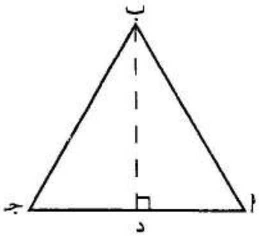
∴ الوتر = ٥ $\sqrt{٢}$ سم

حاول أن تحل

١ (أ) ا ب جـ مثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°. أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم.

(ب) الحساب الذهني: إذا كان ظا جـ = ١ فكيف توجد ق ($\hat{جـ}$) دون استخدام الآلة الحاسبة؟

المثلث ثلاثيني ستيني **30° - 60° triangle**



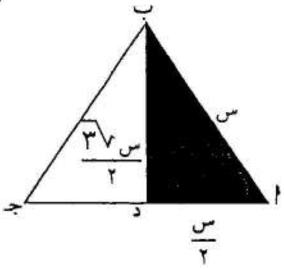
ا ب جـ مثلث متطابق الأضلاع.

ب د ⊥ ا جـ.

لما كان المثلث ا ب جـ متطابق الأضلاع، إذًا $\overline{ب د}$ هي منصف الزاوية ا$\hat{ب}$جـ.

ومنه ق(ا$\hat{ب}$د) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠°، ق($\hat{ا}$) = ٦٠°

يسمى هذا المثلث: مثلث ثلاثيني ستيني (٣٠°، ٦٠°، ٩٠°).



إذا كان طول الضلع ا جـ يساوي س فإن ا د = $\frac{س}{٢}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث في المثلث ا ب د نحصل على ب د = $\frac{س\sqrt{٣}}{٢}$.

كذلك ب د هي المنصف العمودي للقطعة ا جـ.

في هذا المثلث: جا$\hat{ا}$ = جا ٦٠° = $\frac{ب د}{ا ب} = \frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{س} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا$\hat{ا}$ = جتا ٦٠° = $\frac{ا د}{ا ب} = \frac{\frac{س}{٢}}{س} = \frac{١}{٢}$

ظا$\hat{ا}$ = ظا ٦٠° = $\frac{ب د}{ا د} = \frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{س}{٢}} = \sqrt{٣}$

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

كذلك جا$\hat{ب}$ = $\frac{ا د}{ا ب} = \frac{\frac{س}{٢}}{س} = \frac{١}{٢}$

جتا$\hat{ب}$ = جتا ٣٠° = $\frac{ب د}{ا ب} = \frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{س} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا$\hat{ب}$ = ظا ٣٠° = $\frac{\frac{س}{٢}}{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

لاحظ أن جا ٦٠° = جتا ٣٠°

جتا ٦٠° = جا ٣٠°

صح ٨٢

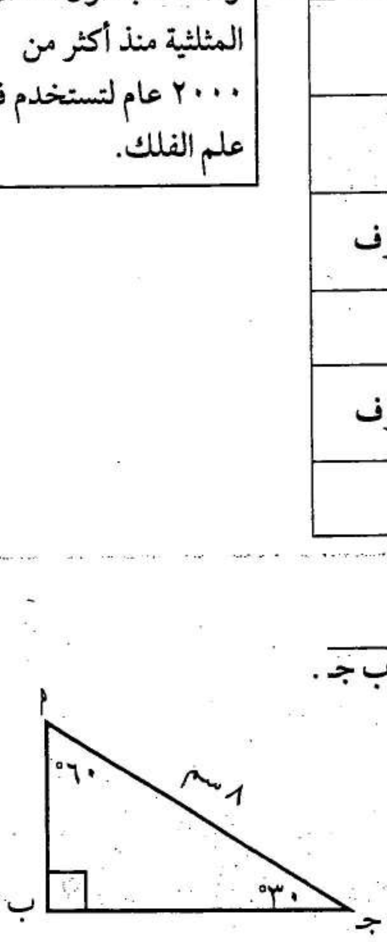
باستخدام الحاسبة يمكنك إيجاد كل من الجيب، جيب التمام والظل لكل زاوية ربعية. والجدول التالي يبيّن النسب المثلثية للزوايا الخاصة والربعية.

الزاوية هـ		جاهـ	جتاهـ	ظاهـ
القياس الستيني	القياس الدائري			
°٠	٠ د	٠	١	٠
°٣٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
°٤٥	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١
°٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
°٩٠	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير معرّف
°١٨٠	π	٠	١-	٠
°٢٧٠	$\frac{٣\pi}{٢}$	١-	٠	غير معرّف
°٣٦٠	٢π	٠	١	٠

هل تعلم؟
وضعت جداول النسب المثلثية منذ أكثر من ٢٠٠٠ عام لتستخدم في علم الفلك.

مثال (٢)

ا ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم. أوجد طول كل من الضلعين $\overline{اب}$، $\overline{ب جـ}$.



الحل:

في Δ ا ب جـ، جاجـ = جا°٣٠ = $\frac{اب}{اجـ}$

$\frac{١}{٢} = \frac{اب}{٨}$

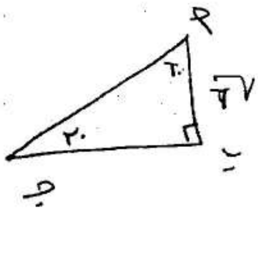
اب = ٤

جتاجـ = جتا(°٣٠) = $\frac{ب جـ}{اجـ}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{ب جـ}{٨}$

ب جـ = $٤\sqrt{٣}$

طول الضلع $\overline{اب}$ = ٤ سم وطول الضلع $\overline{ب جـ}$ = $٤\sqrt{٣} \simeq ٦,٩$ سم.



جا٦٠ = $\frac{\sqrt{٦}}{اجـ}$ = $\frac{١}{٢}$

ا جـ = $٢\sqrt{٦}$

ظا٣٠ = $\frac{\sqrt{٦}}{ب جـ}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ب جـ = $٣\sqrt{٢}$

حاول أن تحل صح ٨٢

٢ في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $\sqrt{٦}$ سم، فأوجد طول الضلعين الباقيين.

ص ٨٣

مثال (٣) **تطبيق لوحة إرشادية لمدرسة**

تشير إحدى لوحات السير على وجود مدرسة. اللوحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد مساحة هذه اللوحة.

الحل:

طول العمود النازل من رأس مثلث متطابق الأضلاع إلى القاعدة = طول الضلع × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (أي ارتفاع المثلث)

= ٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ≃ ٥٢ سم.

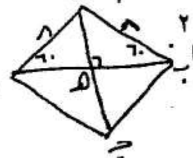
مساحة اللوحة = $\frac{\text{طول القاعدة × الارتفاع}}{٢}$ = $\frac{٦٠ \times ٥٢}{٢}$ = ١٥٦٠ سم^{٢}.

مساحة اللوحة تساوي حوالى ١٥٦٠ سم^{٢}.

جا ٦٠ = $\frac{ع}{٨}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ع = $\frac{٨ \times \sqrt{٣}}{٢}$ = $٤\sqrt{٣}$

ع = $٨\sqrt{٣}$

م = $\frac{١}{٢}$ × ق$_١$ × ق$_٢$ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × $٨\sqrt{٣}$ = $٣٢\sqrt{٣}$ سم^{٢}

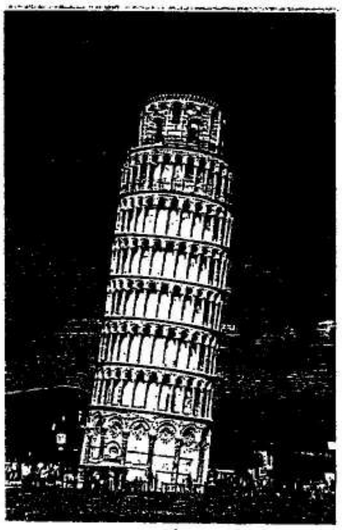


حاول أن تحل ص ٨٣

٣ معيّن يتكوّن من مثلثين متطابقي الأضلاع. أوجد مساحة المعين إذا كان طول ضلع المثلث = ٨ سم.

ص ٨٣

مثال (٤) **تطبيقات حياتية**



برج بيزا معلم أثري مشهور في إيطاليا. كان ارتفاع البرج ٥٥ مترًا قبل ميله نحو الجنوب. ($\overline{اد}$ في الرسم).

شاهد مراقبان موجودان في النقطتين ب، جـ قمة البرج بزاويتين قياساهما ٤٥°، ٣٠° على الترتيب.

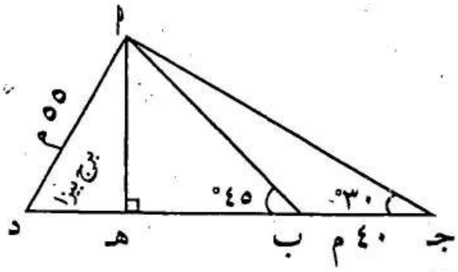
أ عبّر عن طول كل من $\overline{هـ ب}$، $\overline{هـ جـ}$ بدلالة طول $\overline{اهـ}$.

ب أوجد اهـ علمًا أن المسافة بين النقطتين ب، جـ تساوي ٤٠ مترًا.

جـ نتيجة للأشغال المهمة على البرج بين العامين ١٩٩٣ - ٢٠٠١ تقلص البعد بين النقطتين هـ، د من ٤,٥ مترًا إلى ٤ أمتار. ما قياس ($\hat{ادهـ}$) التي يصنعها البرج مع الأرض قبل الأشغال؟ وبعد الأشغال؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

الحل: أ في المثلث اهـ ب: ظا ٤٥° = $\frac{هـ ا}{هـ ب}$ = ١ ومنه هـ ب = هـ ا

في المثلث اهـ جـ: ظا ٣٠° = $\frac{هـ ا}{هـ جـ}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنه هـ جـ = $\sqrt{٣}$ هـ ا



ب هـ جـ = هـ ب + ب جـ

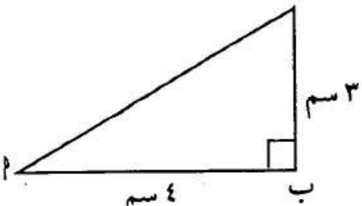
$\sqrt{٣}$ اهـ = هـ ا + ٤٠ أي ($\sqrt{٣}$ - ١) اهـ = ٤٠

اهـ = $\frac{٤٠}{\sqrt{٣} - ١}$ ≃ ٥٤,٦٤

جـ قبل الأشغال: جتا($\hat{ادهـ}$) = $\frac{٤,٥}{٥٥}$ ، ق($\hat{ادجـ}$) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤,٥}{٥٥}\right)$ ≃ ٥٦″ ٢١′ ٨٤°

بعد الأشغال: جتا($\hat{ادهـ}$) = $\frac{٤}{٥٥}$ ، ق($\hat{ادجـ}$) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤}{٥٥}\right)$ ≃ ٤٦″ ٤٩′ ٨٥°

حل المثلث القائم الزاوية



ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$

استخدم حاسبة الجيب لإيجاد ق($\hat{أ}$).

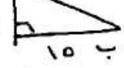
Shift | TAN | 0.75 | = | 36.869897

ق($\hat{أ}$) ≃ ٣٧°.

ق($\hat{ج}$) ≃ ٩٠° - ٣٧° ≃ ٥٣°

٨٥ ص

حاول أن تحل



أب² = ١٢² + ١٥²
أب = ١٩,٢

ظا ب = $\frac{١٢}{١٥}$
ب ≈ ٢٩°

ق(أ) = ٩٠° - ٢٩° = ٥١°

(١) حل المثلث أب ج القائم الزاوية في $\hat{ج}$ حيث: ب ج = ١٥ سم، أج = ١٢ سم

مثال (٢)

حلّ المثلث أب ج القائم في ($\hat{ج}$) إذا علم أن: أب = ٤٠ سم، ق($\hat{ب}$) = ٢٥°

الحل:

ق($\hat{أ}$) = ٩٠° - ٢٥° = ٦٥°

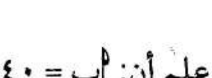
جتا($\hat{ب}$) = $\frac{ب ج}{أب}$ ، جتا (٢٥°) = $\frac{ب ج}{٤٠}$

ب ج = ٤٠ × جتا(٢٥°) ≃ ٣٦,٢٥ سم

جاب = $\frac{أج}{أب}$ ، جا (٢٥°) = $\frac{أج}{٤٠}$

أج = ٤٠ جا (٢٥°) ≃ ١٧ سم

حاول أن تحل ص ٨٥



ق(أ) = ٩٠ - ٧٥
= ١٥°

ظا ٧٥ = $\frac{٢٠}{ب ج}$
ب ج = ٥,٤

جا ٧٥ = $\frac{٢٠}{أب}$
أب = ٢٠,٧

(٢) حل المثلث أب ج القائم في ج حيث: أج = ٢٠ سم، ق($\hat{ب}$) = ٧٥°

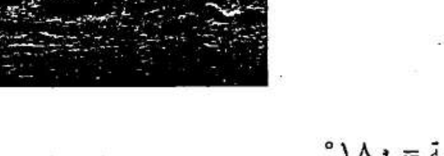
مثال (٣)

حاول أحد السباحين عبور النهر انطلاقًا من النقطة أ الموضحة بالشكل المرسوم جرفه التيار ووصل إلى النقطة ب.

ما المسافة التي قطعها السباح؟

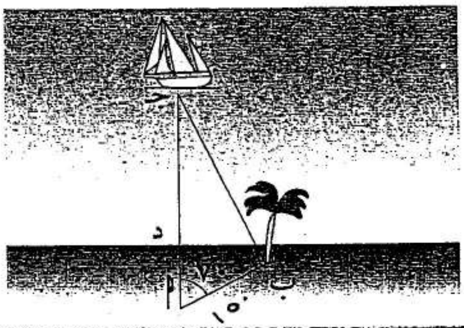
الحل: ليكن ب د البعد العمودي بيّن الضفتين

في المثلث أب د، ق(د$\hat{أ}$ب) = ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠° قياس الزاوية المستقيمة = ١٨٠°.



جا(أ) = $\frac{ب د}{أب}$ جا(٤٠°) = $\frac{١٥}{أب}$ بالتعويض

أب = $\frac{١٥}{\text{جا}(٤٠°)}$ ≃ ٢٣,٣ أي أن السباح قطع حوالى ٢٣,٣ مترًا.



حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل إذا كان، أد = ١٠٠ متر، أب = ١٥٠ متر.

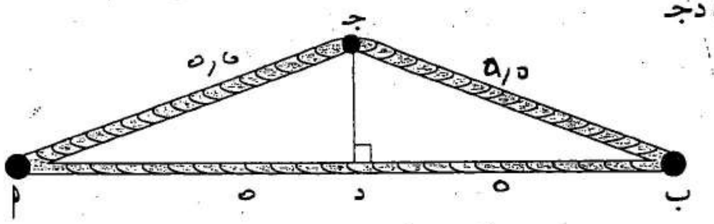
أوجد:

(أ) البعد بين الزورق والشجرة (ب) البعد بين الزورق والشاطىء

ظا ٧٠° = $\frac{\text{ب جـ}}{١٥٠}$ ، ب جـ ≃ ٤١٢ متر | جتا ٧٠ = $\frac{١٥٠}{\text{أ جـ}}$ ، أ جـ = ٤٣٨,٥ متر | البعد بين الزورق والشاطئ = ٤٣٨,٥ − ١٠٠ = ٣٣٨,٥ م

مثال (٤)

حبل طوله ١٠ أمتار مثبت في مسمارين عند النقطتين أ، ب. حبل آخر طوله ١١ مترًا مثبت في نفس النقطتين، شُدّ من وسطه (النقطة جـ) إلى أعلى.



أ أوجد ق(د أ جـ) ب أوجد طول $\overline{\text{دجـ}}$

الحل:

أد = $\frac{\text{أب}}{٢}$ = ٥ أمتار.

أجـ = $\frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ أمتار.

جتاأ = $\frac{\text{أد}}{\text{أجـ}}$ = $\frac{٥}{٥,٥}$ ≃ ٠,٩١

∴ ق(أ) ≃ جتا$^{-١}$ (٠,٩١)

∴ ق(د أ جـ) ≃ ٢٤° ٢٩' ٤١" باستخدام الحاسبة

ب باستخدام نظرية فيثاغورث (جـ د)^٢ + (أد)^٢ = (جـأ)^٢

أي (جـ د)^٢ = (جـأ)^٢ − (أد)^٢

(جـ د)^٢ = ٥,٥^٢ − ٥^٢ = ٥,٢٥

∴ جـ د = $\sqrt{٥,٢٥}$ ≃ ٢,٣

طول القطعة $\overline{\text{جـ د}}$ يساوي حوالي ٢,٣ متر.

حاول أن تحل ص ٨٦

٤ في المثال السابق أوجد (أ) إذا كان طول الحبل من أ إلى ب والمار بالنقطة جـ يساوي ١٢ مترًا.

جتا أ = $\frac{٥}{٦}$ ق(أ) ≃ ٣٣° ٣٣' ٢٦"

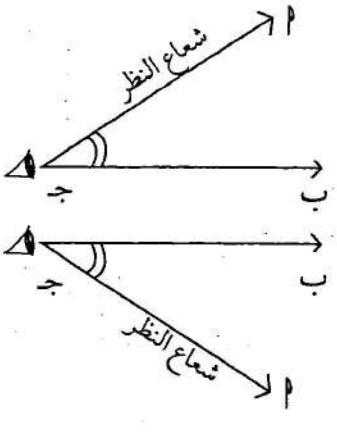
زوايا الارتفاع والانخفاض
ص٨٧

Angles of Elevation and Depression

سوف تتعلم

- زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض
- استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض في حل مسائل حياتية

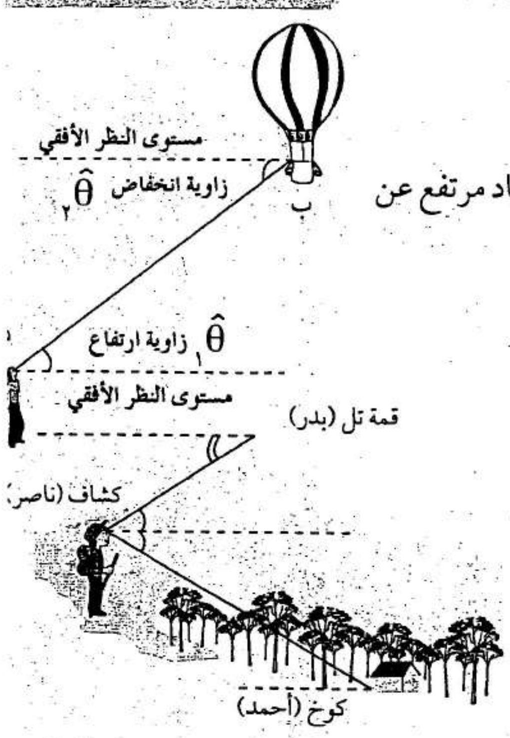
دعنا نفكر ونتناقش



١ - إذا رصد شخص (جـ) نقطة أ أعلى من مستوى نظره الأفقيّ $\overleftarrow{جب}$ فإن الزاوية التي يحددها $\overleftarrow{جأ}$ ، $\overleftarrow{جب}$ تسمى **زاوية ارتفاع** أ عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

٢ - وإذا رصد الشخص جـ نقطة د أدنى من مستوى نظره الأفقي $\overleftarrow{جب}$ فإن الزاوية التي يحددها $\overleftarrow{جد}$ ، $\overleftarrow{جب}$ تسمّى **زاوية انخفاض** د عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

ملاحظة:



إذا كان أ شخصًا موجودًا على سطح الأرض، وكان ب شخصًا موجودًا في منطاد مرتفع عن سطح الأرض، ونظر كلّ منهما إلى الآخر فإنّ:

$\hat{\theta}_1$ هي زاوية ارتفاع ب عن المستوى الأفقيّ لنظر (أ).

$\hat{\theta}_2$ هي زاوية انخفاض (أ) عن المستوى الأفقيّ لنظر (ب)

ونلاحظ في هذه الحالة أنّ:

زاوية الارتفاع ($\hat{\theta}_1$) = زاوية الانخفاض ($\hat{\theta}_2$).

٣ - يقف بدر عند قمة التل ويقف ناصر عند الكشاف ويقف أحمد عند الكوخ.

صف كلّ زاوية في الشكل عندما ينظر:

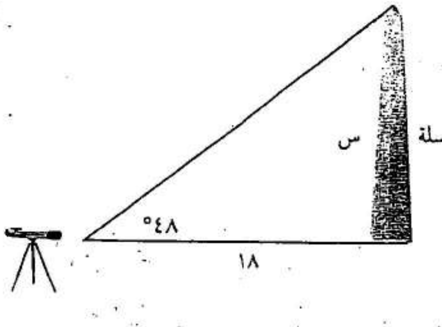
(أ) بدر إلى ناصر

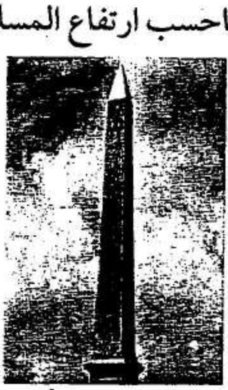
(ب) ناصر إلى أحمد

(جـ) ناصر إلى بدر

مثال (١)

لقياس طول إحدى المسلات قام مرشد سياحيّ برصد قمة المسلة من خلال جهاز للرصد، فوجد أنّ قياس زاوية الارتفا ٤٨°. إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المسلة مسافة ١٨ م فاحسب ارتفاع المسلة.





الحل:

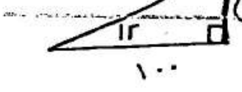
ظا(٤٨)° = $\frac{س}{١٨}$

س = ١٨ × ظا (٤٨)° ≃ ٢٠

ارتفاع المسلة: ٢٠ م تقريبًا

حاول أن تحل ص٨٧

(١) من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر عن قاعدة مئذنة، وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة ١٢°. أوجد ارتف المئذنة عن سطح الأرض. ظا ١٢° = $\frac{ع}{١٠٠}$



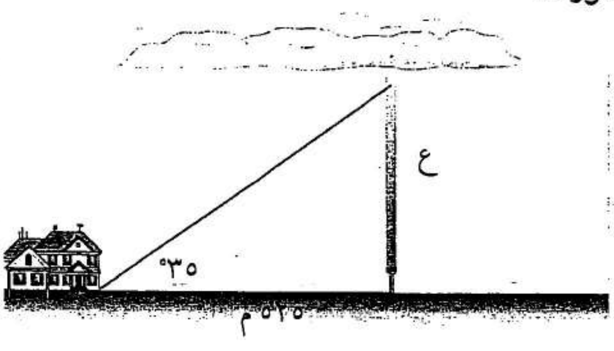
ارتفاع المئذنة = ١٠٠ × ظا ١٢ = ٢١٫٣ م

صـ ١١٥

مثال (٢)

علم الأرصاد الجوية: لمعرفة ارتفاع طبقة من الغيوم عن سطح الأرض يستخدم علماء الفلك قياس زاوية الارتفاع في اللحظة التي يصل فيها البرق إلى الأرض. (يمكن نمذجة المسألة كما في الصورة).

أوجد قيمة تقريبية لارتفاع طبقة الغيوم عن سطح الأرض.



الحل:

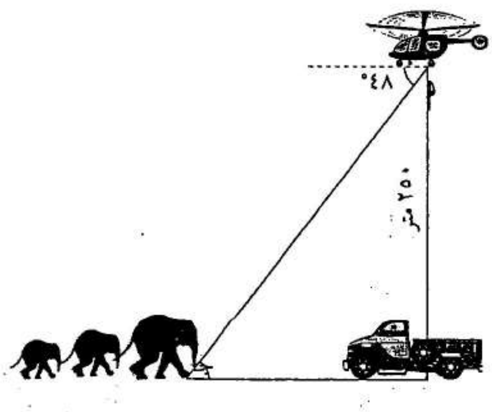
ظا (٣٥°) = $\frac{\text{ع}}{٥٢٥}$

ع = ٥٢٥ × ظا (٣٥°)

ع ≃ ٣٦٧,٦ مترًا

مثال (٣)

تحلق مروحية فوق محمية طبيعية على ارتفاع ٢٥٠ مترًا وتواكبها على الأرض سيارة حرس المحمية. شاهد ربان المروحية قطيعًا من الفيلة بزاوية انخفاض قياسها ٤٨°. ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة علمًا بأن السيارة مباشرة تحت المروحية؟



الحل:

لتكن أ موقع المروحية، ب موقع السيارة، جـ موقع القطيع.

جاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

جا٤٨° = $\frac{٢٥٠}{\text{أجـ}}$

أجـ = $\frac{٢٥٠}{\text{جا}٤٨°}$ ≃ ٢٢٥

أجـ ≃ ٣٣٦,٤ مترًا

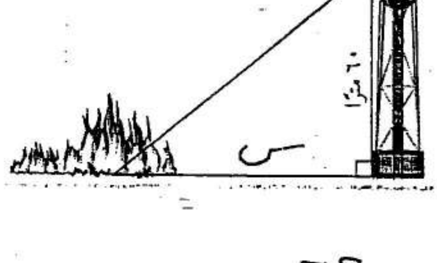
يبعد قطيع الفيلة حوالى ٣٣٦ مترًا عن المروحية.

حاول أن تحل ص ٨٨

(٣) يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ مترًا. شاهد حريقًا بزاوية انخفاض قياسها ٤٠°. ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة وموقع الحريق؟

ظا٤٠ = $\frac{٦٠}{\text{س}}$

المسافة = ٧١,٥ متر تقريبًا

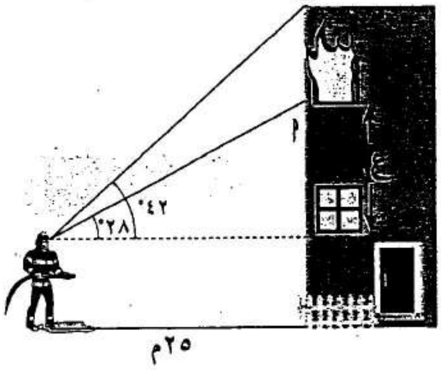


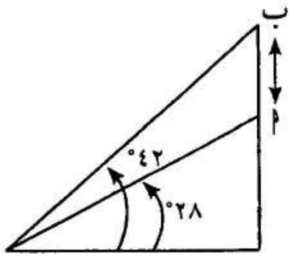
٨٩ م

مثال (٤)

شاهد رجل إطفاء وهو يقف على سطح الأرض ألسنة النيران تنبعث من إحدى النوافذ القريبة من سطح البناء. وجد أن قياس زاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى القاعدة السفلية للنافذة (أ) حيث تندلع النيران هي ٢٨°، وزاوية الارتفاع من مستوى نظر إلى سطح البناء (ب) قياسها ٤٢°. علمًا أن رجل إطفاء يقف على مسافة ٢٥ مترًا من قاعدة البناء.

ما المسافة بين قاعدة النافذة (حيث ألسنة النيران) وسطح البناء؟





الحل: بفرض أن $ع_١$ هي البعد بين القاعدة السفلية للنافذة أ ومستوى النظر الأفقي.

$ظا٢٨° = \frac{ع_١}{٢٥}$ ؛ $ع_١ = ٢٥$ ظا٢٨°.

بفرض أن $ع_٢$ هي البعد بين سطح البناء والمستوى الأفقي للنظر.

$ظا٤٢° = \frac{ع_٢}{٢٥}$ ؛ $ع_٢ = ٢٥$ ظا٤٢°

$ع = ع_٢ - ع_١ = ٢٥($ظا ٤٢° − ظا ٢٨°$)$

$\simeq ٩,٢٢$ أمتار

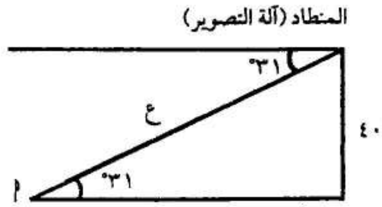
∴ المسافة المطلوبة $\simeq ٩,٢٢$ أمتار

حاول أن تحل

٨٩ م

٤ زُوِّد منطاد بهوائي تلفزيون لنقل مباراة كرة القدم، حيث تراقب آلة التصوير الملعب عند النقطة أ بزاوية انخفاض ٣١°. يبلغ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض ٤٠٠ متر.

ما طول خط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب؟



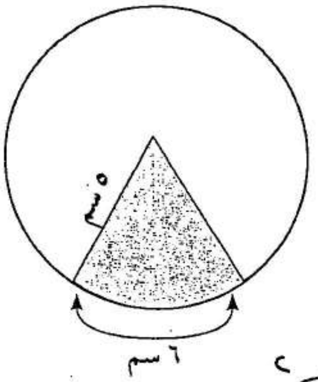
ظا ٤٢° = $\frac{ع}{ع}$

ع = ٦٦٦ متر تقريباً .

القطاع الدائري والقطعة الدائرية

ص ٨١

مثال (١)



أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:

الحل:

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٥$

= ١٥ سم^{٢}

مساحة القطاع الدائري تساوي ١٥ سم^{٢}

حاول أن تحل مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ١٠ = ٢٠$ سم^{٢}

(١) **أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.**

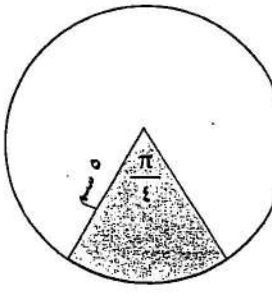
تعرّفت في بداية الوحدة الثانية أن طول القوس ل يساوي قياس الزاوية المركزية بالراديان مضروبًا في طول نصف القطر:

ل = هـ^{د} × نق

إذا عوّضنا عن ل بـ هـ^{د} × نق نحصل على:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق × نق = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢}

مثال (٢)



أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:

الحل:

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢} = $\frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{٤} \times (٥)^{٢}$

= $\frac{٢٥\pi}{٨} \simeq ٩,٨$ سم^{٢}

مساحة القطاع الدائري تساوي حوالى ٩,٨ سم^{٢}

٢- القطعة الدائرية: Circular Segment

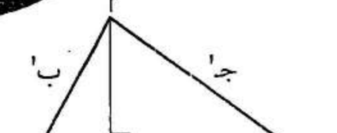
القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

٣- مساحة المثلث: Area of a Triangle

مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أد

لكن جاب = $\frac{أد}{أب}$ ∴ أد = أب × جاب

مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جاب.



مساحة المثلث أب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × ب أ × جاب

= $\frac{1}{2}$ ب جـ × أجـ × جاجـ

= $\frac{1}{2}$ أب × أجـ × جاأ

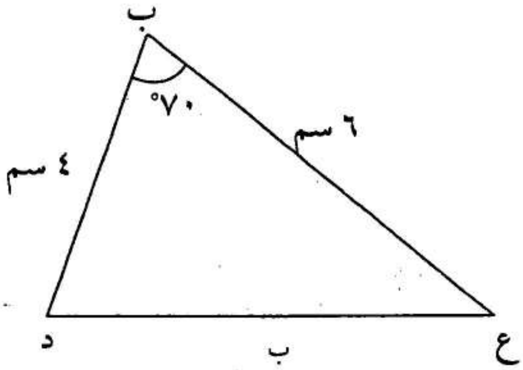
أي أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

وباختصار نكتب مساحة المثلث أب جـ = $\frac{1}{2}$ أ' جـ' جاب

= $\frac{1}{2}$ أ' ب' × جاجـ

= $\frac{1}{2}$ ب' جـ' جاأ

مثال (٣)



ب ع د حيث ب ع = ٦ سم، ب د = ٤ سم، ق(بَ) = ٧٠°

أوجد مساحة هذا المثلث.

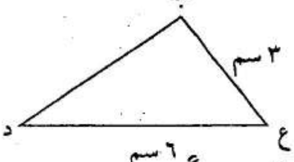
الحل:

مساحة المثلث ب ع د = $\frac{1}{2}$ ب ع × ب د × جا(بَ)

= $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٤ × جا(٧٠°) ≃ ١١,٢٧٦

مساحة المثلث ب ع د هي حوالى ١١,٢٧٦ سم².

حاول أن تحل م = $\frac{1}{2}$ × ٣ × ٦ × جا ع ∴ ٧ = ٩ جا ع

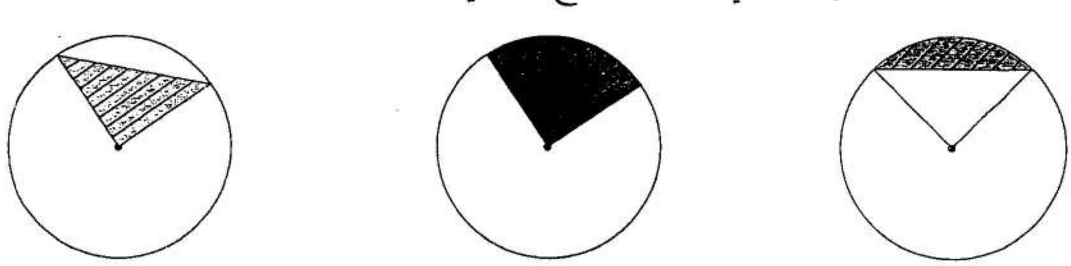


(٢) في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم². فأوجد ق(عَ).

ق(عَ) ≃ ٥١,٠٤ تقريباً

٤- مساحة القطعة الدائرية: Area of a Circular Segment

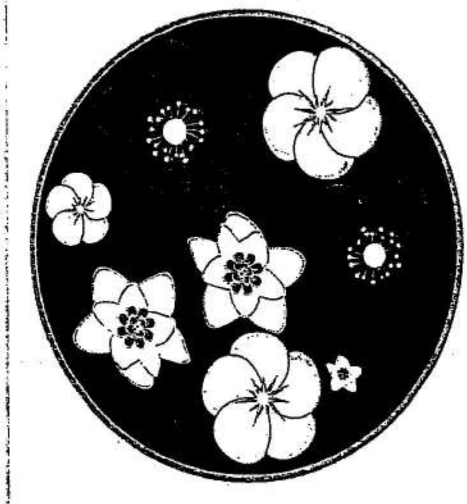
مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحًا منه مساحة المثلث.

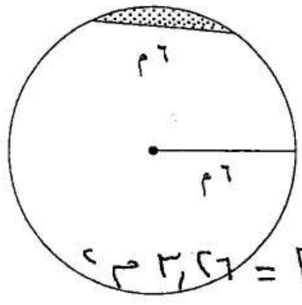


مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الدائري - مساحة المثلث

حاول أن تحل

٣ أ حوض زهور دائري طول نصف قطره ٦ م (انظر الشكل المقابل)، وفي هذا الحوض وتر طوله ٦ م. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى.





مثلث متطابق الأضلاع

الزاوية المركزية ٦٠°

$هـ^ء = ٦٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} \simeq ١,٠٤٧٢$

مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{١}{٢} نق^٢ [هـ^ء - جا هـ^\circ]$

$= \frac{١}{٢} \times ٣٦ [١,٠٤٧٢ - جا ٦٠] = ٣,٢٦ م^٢$

ب أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°. $هـ^ء = ٧٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = ١,٢٢١٧$

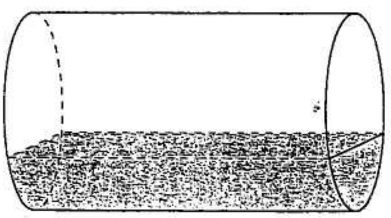
$م = \frac{١}{٢} نق^٢ [هـ^ء - جا هـ] = \frac{١}{٢} \times ١٠٠ [١,٢٢١٧ - جا ٧٠^\circ] = ١٤,١ سم^٢$

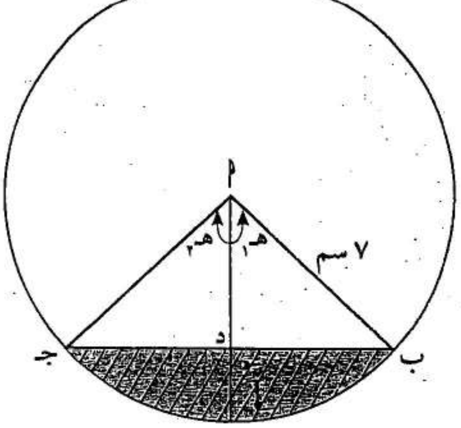
مثال (٥)

يبيّن الشكل المقابل مقطعًا في أنبوب أسطواني الشكل، ومياهًا متجمعة في القاع.

إذا كان أقصى عمق الماء هو ٢ سم وطول نصف قطر الأنبوب ٧ سم،

فأوجد مساحة الجزء المظلل باللون الوردي.





الحل: م د = ٥ سم

$هـ_١ = جتا^{-١} \left(\frac{٥}{٧}\right) \simeq ٠,٧٧٥^ء = هـ_٢$

$هـ = هـ_١ + هـ_٢ \simeq ١,٥٥^ء$

مساحة القطاع الأصغر $= \frac{١}{٢} \times هـ^ء \times نق^٢$

$= \frac{١}{٢} \times ١,٥٥ \times ٧^٢ \simeq ٣٧,٩٧٥$ سم^٢

مساحة المثلث م ب جـ $= \frac{١}{٢} \times$ م جـ $\times$ م ب $\times$ جا$(١,٥٥^ء) \simeq \frac{١}{٢} \times ٤٩ \times$ جا$(١,٥٥^ء) \simeq ٢٤,٤٩٤٧$ سم^٢

مساحة الجزء المظلل $= ٣٧,٩٧٥ - ٢٤,٤٩٤٧ \simeq ١٣,٤٨$ سم^٢