

الوحدة الثالثة

الجبر - التغيير

(ملخص لهما قوانين الوحدة الثالثة)

- يوجد في شكله متساوية أوضاع من الزوايا متبادلة القياس وأوضاع من الأضلاع متناسبة الأطوال.
- عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر يكون المثلثان متساويين.
- عند تطابق زاوية في مثلث مع زاوية في مثلث آخر عرضاً سب طولي الضلعين المحددتين لهاتين الزاويتين. يكون المثلثان متساويين.
- عند تناسب أطوال الأضلاع الثلاثة المتناظرة في مثلثين. يكون المثلثان متساويين.
- يقسم العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر المثلث القائم الزاوية إلى مثلثين متساويين وكل منهما متساو للمثلث الأصلي.
- نظرية طاليس:
- إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمتين متوازيات أو أكثر مع بعضها بعضاً. فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.
- عندما يوازي مستقيم أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.
- يقسم المنصف للزاوية الداخلية في المثلث الضلع المقابل لها إلى جزئين النسبة بين طوليها تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.
- إذا كانت نسبة التماس بين مثلثين متساويين هي $\frac{a}{b}$ فإن:
 - ① النسبة بين محيطي مثلثين = $\frac{a}{b}$.
 - ② النسبة بين مساحتي مثلثين = $(\frac{a}{b})^2$.
- نسبة التماس بين أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصف قطريهما.

النسبة والتناسب Ratio and Proportion

لحل

دعنا نفكر ونتناقش

سوف تتعلم

- خواص التناسب
- تمارين وتطبيقات هندسية
- خواص التناسب المتسلسل

تعلم أن النسبة هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه يمكن تمثيلها بكسر. فمثلاً: النسبة بين العدد ٣ (الحد الأول)، والعدد ٤ (الحد الثاني) هي $\frac{3}{4}$ ويمكن التعبير عن هذه النسبة بالصورة ٣:٤ وتقرأ ٣ إلى ٤.

مثال (١)

تذكر:

$$1 \text{ كم} = 1000000 \text{ سم}$$

إذا كانت المسافة بين الكويت العاصمة والرياض هي ٥٥٠ كم، وكانت هذه المسافة ممثلة في إحدى الخرائط بقطعة مستقيمة طولها ١١ سم. أوجد مقياس الرسم، ثم أوجد النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقية.

الحل:

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$$

$$\frac{11 \text{ سم}}{55000000 \text{ سم}} = \frac{11 \text{ سم}}{550 \text{ كم}}$$

حيث إن الكميتين من النوع نفسه يمكن كتابتها كنسبة بالصورة:

$$\frac{11}{55000000} \text{ أو } 11 : 55000000$$

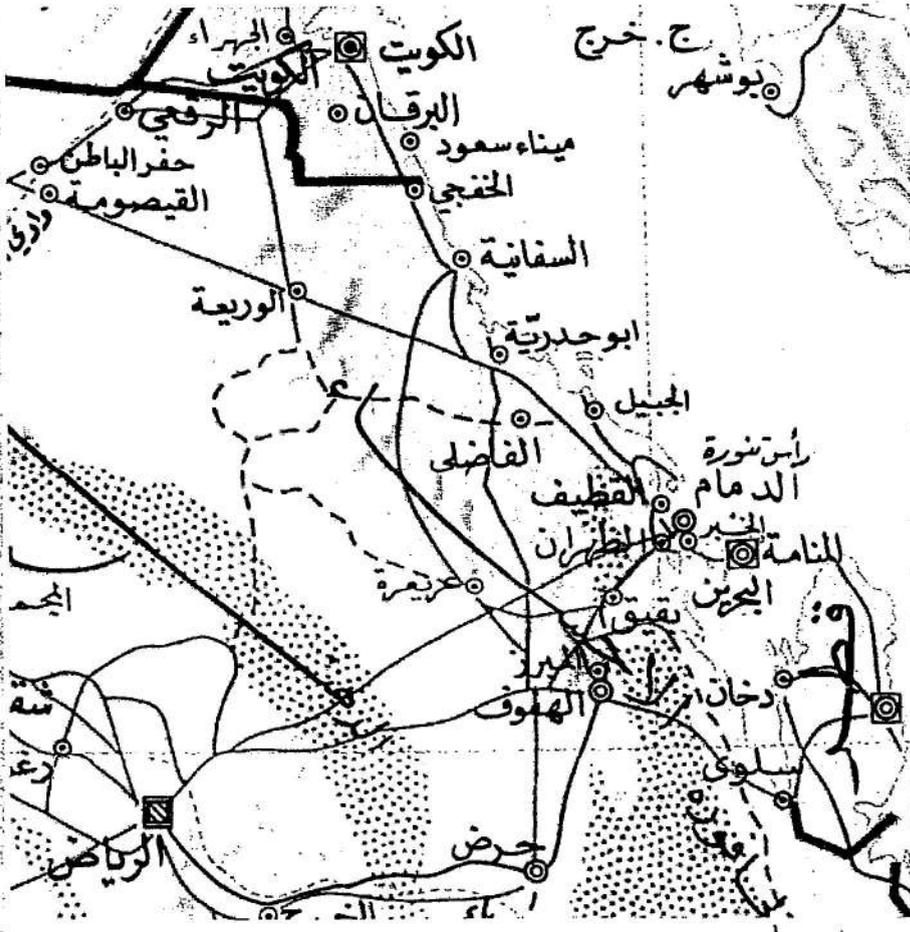
أي النسبة تساوي ١ : ٥٠٠٠٠٠٠

حاول أن تحل

١) من مثال (١) استخدم مقياس الرسم على الخريطة لإيجاد المسافة الحقيقية بين الدمام والكويت العاصمة.

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$$

$$\text{المسافة الحقيقية} = \frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{مقياس الرسم}}$$



*

$$س = \frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}} \times 100$$

$$س = \frac{132,5}{2650} \times 100$$

$$س = 5$$

∴ النسبة المئوية للزيادة هي 5، أي أن الزيادة تساوي 5% من الإنتاج عن العام السابق.

حاول أن تحل

٢) في العام 2010، كان إنتاج المزرعة نفسها 5500 طنًا من البطاطا أما في العام 2011 فكان الإنتاج 6350 طنًا.

احسب النسبة المئوية لزيادة منتج البطاطا بين عامي 2010، 2011 إلى أقرب جزء من مئة.

$$\text{Proportion النسبة المئوية للزيادة} = \frac{\text{سمة التكم}}{\text{القيمة الأصلية}} \times 100$$

التناسب

$$= \frac{800}{5500} \times 100 = 14,55\%$$

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

$$\text{فمثلاً: } \frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \dots$$

ويمكن كتابة ذلك كالاتي: 3:4 = 12:16 = 15:20 = ...
وتقرأ 3 إلى 4 هي نفسها 12 إلى 16 هي نفسها 15 إلى 20 = ...

خاصية التساوي:

ليكن أ، ب، ج، د، ج*، ك ∃ ج.

$$\text{إذا كان } \frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} \text{ فإن } \frac{أ}{ب} \times ك = ك \times \frac{ج}{د} \text{ ، } ك \times \frac{أ}{ب} = ك \times \frac{ج}{د}$$

١.١

فمثلاً:

نعلم أن $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ بضرب الطرفين في ٥ نجد أن:

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4} \quad \text{أي أن } 2 \times \frac{15}{20} = 2 \times \frac{3}{4}$$

تذكر:

*ح هي مجموعة الأعداد

الحقيقية غير الصفرية

$$*ح = ح - \{0\}$$

الرمز \exists يقرأ ينتمي إلى

مثال (٣)

إذا كان $\frac{5}{6} = \frac{1}{9}$ فأوجد قيمة أ.

الحل: $\frac{5}{6} = \frac{1}{9}$

$$\frac{5}{6} \times 18 = \frac{1}{9} \times 18$$

$$15 = 2$$

$$\frac{15}{2} = 1$$

$$7,5 = 1$$

بضرب الطرفين في ١٨ (م.م للعددين ٦، ٩)

بالتبسيط

بقسمة الطرفين على ٢

١.١

حاول أن تحل

ضرب الطرفين في ١٨

$$18 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{9} \times 18$$

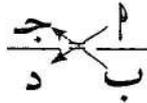
$$15 = 2$$

إذا كان $\frac{4}{6} = \frac{ص}{9}$ فأوجد قيمة ص.

خاصية الضرب التقاطعي:

ليكن أ، ب، ج، د \exists ح *

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن $أد = ب ج$



فمثلاً: $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ من ذلك نجد أن:

$$3 \times 16 = 4 \times 12$$

$$48 = 48 \quad \text{عبارة صحيحة}$$

مثال (٤)

أوجد قيمة ص في التناسب: $\frac{3}{4} = \frac{ص}{2,5}$

الحل:

ضرب تقاطعي

$$2,5 \times 3 = 4 \times ص$$

$$7,5 = 4 \times ص$$

$$\frac{7,5}{4} = ص$$

$$ص = 1,875$$

بقسمة الطرفين على ٤

حاول أن تحل

$$ب \times ٨ = ٢ \times ٤$$
$$٥ = \frac{٢ \times ٤}{٨} = ب$$

أوجد قيمة ب في التناسب: $\frac{٨}{٢٠} = \frac{٢}{ب}$

تعريف:

ليكن $ا, ب, ج, د \in \mathbb{R}^*$

إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإنه يقال أن $ا, ب, ج, د$ أعداد متناسبة.

وإذا كانت $ا, ب, ج, د$ أعداد متناسبة فإن $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$

ويسمى $ا, د$ طرفي التناسب، كما يسمى $ب, ج$ وسطى التناسب.

ولأن في هذه الحالة $ا د = ب ج$ خاصية الضرب التقاطعي

فإن: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

مثال (٥)

أثبت أن ٤، ١، ٥، ٨، ٣ أعداد متناسبة.

الحل:

تكون الأعداد ٤، ١، ٥، ٨، ٣ أعدادًا متناسبة عندما تتساوى النسبتان $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٤}{١,٥}$

$$\frac{٨}{٣} = \frac{٤}{١,٥} = \frac{٤}{١,٥}$$

$$\frac{٨}{٣} = \frac{٤}{١,٥}$$

∴ الأعداد متناسبة.

$$١٤٢٨ = ٢١٤ \times ٤١٢$$

$$١٤٢٨ = ٧٨ \times ١٠٤$$

$$\frac{١٠٤}{٤١٢} < \frac{٢١٤}{٧٨}$$

حاول أن تحل

الأعداد متناسبة

$$\frac{١٠٤}{٤١٢} = \frac{٢١٤}{٧٨}$$

أثبت أن ٤، ٢، ٢، ١٤، ٧، ٣، ٤ أعداد متناسبة.

١.٤

مثال (٧)

إذا كانت $أ، ب، ج$ أعدادًا متناسبة مع الأعداد $٢، ٥، ٧$. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ+٣}{ب+٢}$.

الحل:

$أ، ب، ج$ متناسبة مع $٢، ٥، ٧$

$$\therefore \frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{ج}{٧} = م$$

$أ = ٢م، ب = ٥م، ج = ٧م$

$$\therefore \text{المقدار} = \frac{أ+٣}{ب+٢} = \frac{٢م+٣}{٥م+٢} = \frac{٢٧}{١٧} = ١$$

معلومة رياضية:
إذا كانت $أ، ب، ج$ أعدادًا متناسبة مع الأعداد $د، هـ، و$ ، فإن:
 $\frac{أ}{د} = \frac{ب}{هـ} = \frac{ج}{و}$

$$\frac{١}{٣} = \frac{٣١٨}{٣٢٦} = \frac{٢١٥ + ٢٢}{٢١١ + ٢٢٥} \text{ المقادير}$$

$$\frac{٣٢}{٣٥} = \frac{٤}{٥} = \frac{٣}{٥}$$

حاول أن تحل

إذا كانت الأعداد $أ، ب، ج$ متناسبة مع $٣، ٥، ١١$. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ+٣}{ب+٥}$.

١.٤

مثال (٨)

تشارك سالم ومنصور بتنفيذ أعمال الدهان. إن نسبة الزمن الذي أمضياه في العمل هي $٧:٤$. قبضا معًا ٨٨ دينارًا. كيف سيتوزع هذا المبلغ بينهما إذا عمل سالم فترة زمنية أطول من منصور؟

الحل: لتكن $س$ نصيب سالم، $م$ نصيب منصور من المبلغ.

كتابة التناسب

$$\frac{٧}{٤} = \frac{س}{م}$$

من خواص التناسب

$$\frac{٤+٧}{٤} = \frac{س+م}{م}$$

$$\frac{١١}{٤} = \frac{٨٨}{م}$$

$$٣٢ = \frac{٨٨ \times ٤}{١١} = م$$

$$س = ٨٨ - ٣٢ = ٥٦$$

ينال سالم ٥٦ دينارًا، وينال منصور ٣٢ دينارًا.



١.٥

حاول أن تحل

في مثال (٧)، كيف سيتوزع المبلغ بين سالم ومنصور إذا كانت نسبة الزمن $٥:٣$ ، إذا عمل منصور فترة زمنية أطول من سالم؟

$$\frac{٥}{٣} = \frac{س}{م} \quad \frac{٨}{٣} = \frac{س+م}{م} \quad \frac{٨}{٣} = \frac{٨٨}{م} \quad \frac{٨}{٣} = \frac{٣٥٤}{م}$$

١٠٥

مثال (١٠) تطبيقات حياتية

عند القيام بأنشطة رياضية فإن الشخص يفقد سرعات حرارية تتناسب تقريباً مع وزنه.

والجدول المجاور يبين ذلك لشخص وزنه ٦٥ كجم، عند قيامه بالنشاطات المذكورة لمدة ٦٠ دقيقة.

قام هذا الشخص بأحد هذه الأنشطة لمدة ٨٠ دقيقة. اكتب تناسباً تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السرعات الحرارية التي يفقدها (بالتقريب).

السرعات المحروقة	النشاط لمدة ٦٠ دقيقة
٣٠٠	المشي بسرعة ٤ كم/ساعة
٤٠٠	المشي السريع
٤٠٠	المشي السريع

الحل: بفرض أن S عدد السرعات الحرارية التي يفقدها في كل نشاط عند المشي ٦٠ دقيقة يحرق ٣٠٠ سرعة حرارية عند المشي ٨٠ دقيقة يحرق S سرعة حرارية

$$\text{أي أن } \frac{80}{60} = \frac{S}{300}$$

$$\text{باستخدام الضرب التقاطعي } 80 \times 300 = 60S$$

$$\frac{80 \times 300}{60} = S$$

$$S = 400 \text{ سرعة حرارية تقريباً}$$

وبالمثل السباحة: $\frac{80}{60} = \frac{S}{500}$ ، $S = 667$ سرعة حرارية تقريباً.

وبالمثل كرة القدم: $\frac{80}{60} = \frac{S}{400}$ ، $S = 533$ سرعة حرارية تقريباً.

حاول أن تحل ١٠٥

إذا مارست رياضة كرة السلة لمدة ٢٠ دقيقة، تفقد ٣٠٠ سرعة. اكتب تناسباً تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السرعات الحرارية التي تفقدها إذا مارست هذه الرياضة لمدة ٥٠ دقيقة. $\frac{20}{50} = \frac{300}{S}$ $S = 750$ سرعة حرارية

Geometric Proportion

التناسب المتسلسل الهندسي

ليكن a, b, c ، ج \exists ح*

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ فإنه يقال إن a, b, c ، ج في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت a, b, c ، ج في تناسب متسلسل فإن: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

ويسمى b الوسط المتناسب للعدين a, c ، ج أو الوسط الهندسي لهما كما يسمى a, c ج طرفي التناسب.

فمثلاً: $2, 4, 8$ في تناسب متسلسل لأن $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.

ولاحظ أن $2, 4, 8$ كذلك في تناسب متسلسل لأن $\frac{4}{2} = \frac{8}{4}$.

إذا كان a, b, c في تناسب متسلسل فإن a, b, c في تناسب متسلسل أيضًا.

مثال (٩) ١.٦

أثبت أن الأعداد ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

الحل:

$$\frac{1}{3} = \frac{9 \div 9}{9 \div 27} = \frac{9}{27}, \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{9}{27} = \frac{3}{9} \therefore$$

أي أن ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

حاول أن تحل ١.٦

٦٤، ١٦، ٤

٨ اكتب ٣ أعداد في تناسب متسلسل.

مثال (١٠) ١.٧

إذا كانت الأعداد ٥، س، ٢٠ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س، ثم تحقق.

الحل: نكتب التناسب المتسلسل: $\frac{س}{٢٠} = \frac{٥}{س}$

الضرب التقاطعي

$$س \cdot س = ١٠٠$$

$$س = ١٠ \text{ أو } س = -١٠$$

التحقق:

$س = -١٠$ $\frac{س}{٢٠} = \frac{٥}{س}$ $\frac{-١٠}{٢٠} = \frac{٥}{-١٠}$ $\checkmark ١٠٠ = ١٠٠$	$س = ١٠$ $\frac{س}{٢٠} = \frac{٥}{س}$ $\frac{١٠}{٢٠} = \frac{٥}{١٠}$ $\checkmark ١٠٠ = ١٠٠$
--	---

حاول أن تحل ١.٧

٩ هل يمكن إيجاد قيمة س بحيث تكون الأعداد ٩، س، ٤ في تناسب متسلسل؟ فسر.

$$\frac{س}{٤} = \frac{٩}{س} \therefore س^2 = ٣٦ \text{ لا يمكن إيجاد قيمة س}$$

لأن س قيمة سالبة.

١.٧

Properties of Chaine Proportion

خواص التناسب المتسلسل

خاصية (١)

ليكن a, b, c ج \exists ح *

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (أي أن a, b, c, d ج في تناسب متسلسل)

فإن $a^2 = b \cdot c$ وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

فمثلاً: في حالة ٣، ٩، ٢٧ نجد أن:

$$27 \times 3 = 9^2 \quad (\text{كل من الطرفين يساوي } 81)$$

خاصية (٢) ١.٨

ليكن a, b, c, d ج، د \exists ح *

إذا كان:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = m$ (أي أن a, b, c, d, e, f, g, h ج، د في تناسب متسلسل)

فإن:

$$a \times d = b \times c, \quad a \times f = b \times e, \quad a \times h = b \times g$$

فمثلاً: في حالة $2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8}$ نجد أن:

$$16 \times 2 = 8^2, \quad 8 \times 2 = 4^2, \quad 4 \times 2 = 2^2$$

مثال (١:١) ١.٨

إذا كانت الأعداد ٦، س، ٥٤، ١٦٢ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

الحل:

∴ الأعداد في تناسب متسلسل

$$\frac{54}{162} = \frac{س}{54} = \frac{6}{س}$$

$$\frac{54}{162} = \frac{6}{س}$$

$$س \times 54 = 162 \times 6$$

$$س = \frac{162 \times 6}{54} = 18$$

قيمة س = ١٨

الضرب التقاطعي

$$\frac{54}{162} = \frac{س}{54} = \frac{6}{س}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{س-٤}{١} = \frac{٤}{س-٤}$$

حاول أن تحل ١.٨

١ إذا كانت الأعداد ٤، س-٢، ١، $\frac{1}{3}$ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

مثال (١٢) اشتراكي م ١٠٩

إذا كانت الأعداد أ، ب، ج، د في تناسب متسلسل، فأثبت أن $\frac{أ}{ب} = \frac{أ+ب+ج}{ب+ج+د}$

الحل:

∴ أ، ب، ج، د في تناسب متسلسل

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$ تناسب متسلسل

∴ ج = د × م، ب = د × م^٢، أ = د × م^٣

$$\frac{أ}{ب} = م = \frac{أ+ب+ج}{ب+ج+د} = \frac{د(م^3+م^2+م)}{د(م+م^2+م^3)}$$

حل آخر: من التناسب السابق أ = ب × م، ب = ج × م، ج = د × م

$$\frac{أ}{ب} = م = \frac{أ+ب+ج}{ب+ج+د} = \frac{ب(م+م+م)}{ب(م+م+م)}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د}$$

١٠٩ حاول أن تحل

١٢ إذا كانت الأعداد أ، ب، ج في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{أ-٢}{ب-٣} = \frac{ب+٣}{ج+٤}$ (بشرط المقام ≠ ٠)

$$\frac{أ-٢}{ب-٣} = \frac{ب+٣}{ج+٤} = م \Rightarrow \frac{أ-٢}{ب-٣} = م \Rightarrow \frac{ب+٣}{ج+٤} = م$$

$$\frac{أ-٢}{ب-٣} = م \Rightarrow \frac{ب+٣}{ج+٤} = م \Rightarrow \frac{أ-٢}{ب-٣} = \frac{ب+٣}{ج+٤}$$

الطرقتان متساويتان

التغير الطردي ص ١١.٤

ص ١١٢

مثال (١)

إذا كانت ص α س وكانت ص = ٣٠ عندما س = ١٠، فأوجد قيمة ص عندما س = ٤٠، ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانياً.

الحل: \therefore ص α س

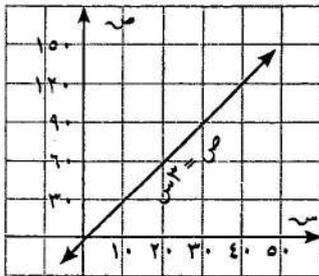
\therefore ص = ك س

$\therefore ٣٠ = ١٠ \times ك$

ك = ٣

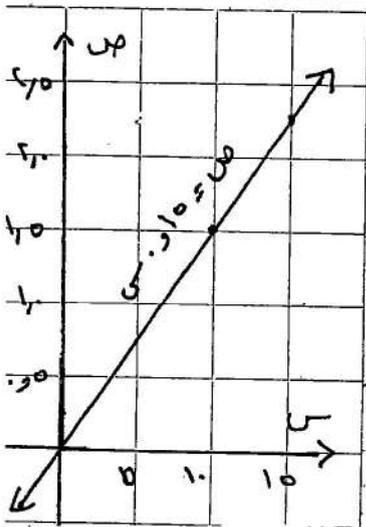
\therefore ص = ٣ س

عندما س = ٤٠ تكون ص = $٤٠ \times ٣ = ١٢٠$



٤٠	١٠	٠	س
١٢٠	٣٠	٠	ص = ٣ س

ص ١١٢ حاول أن تحل



١) إذا كانت ص α س وكانت ص = ١٥ عندما س = ١٠، أوجد قيمة ص عندما س = ١٥

عندما س = ١٥ ص = ٢٢.٥

١٥	١٠	٠	س
٢٢.٥	١٥	٠	ص

١٥	١٠	٠	س
٢٢.٥	١٥	٠	ص

ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانياً.

ص = ١.٥ س

مثال (٢)

في إحدى المناطق ترتفع درجة الحرارة بانتظام خلال النهار بمعدل 3° في الساعة. اكتب معادلة تغير طردي تمثل هذا الارتفاع.

الحل:

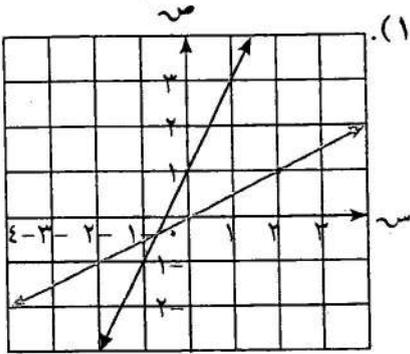
\therefore درجة الحرارة ترتفع بانتظام

\therefore معدل التغير = ٣

المعادلة هي ص = ٣ س حيث ص درجة الحرارة، س عدد الساعات.

مثال (٣)

في الشكل المقابل، أي من المستقيمين يمثل تغيرًا طرديًا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.
الحل:



المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل يمثل تغيرًا طرديًا بين س، ص وهو يمر بالنقطة (٢، ١).
ثابت التغير $\frac{1}{2} = \frac{ص}{س}$

المستقيم الثاني لا يمر بنقطة الأصل فهو لا يمثل تغيرًا طرديًا.

حاول أن تحل

٢ هل المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ (٣، ٢)، ب (٦، ٤) يمثل تغيرًا طرديًا بين س، ص. اشرح إجابتك.
نعم لأن $\frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٦} = \frac{ص}{س}$ ثابت التغير $\frac{٢}{٣} = \frac{ص}{س}$

مثال (٤)

أي من المعادلتين التاليتين تمثل تغيرًا طرديًا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

أ $٥س - ٣ص = ٥$

ب $٥س + ٢ص = ٩$

الحل:

أ $٥س - ٣ص = ٥$

ب $٥س + ٢ص = ٩$

ب $٥س - ٣ص = ٥$

ب $٨ص = ٢س$

ب $٥س - ٣ص = ٥$

ب $٨ص = ٢س$ على الصورة ص = ك س

ب $٥س - ٣ص = ٥$ وهذه ليست على الصورة

ص = ك س

إذا هذه المعادلة لا تمثل تغيرًا طرديًا.

هذه المعادلة تمثل تغيرًا طرديًا،

حيث ثابت التغير $\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

٣ أي من المعادلات التالية تمثل تغيرًا طرديًا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

أ $٧ص = ٢س$ ب $٤س = \frac{ص}{٤}$ ج $٤س + ٣ص = ٨$ د $٣س - ٢ص = ٨$ هـ $٤س = \frac{ص}{٤}$ ثابت التغير

ب $٤س + ٣ص = ٨$ ج $٣س + ٢ص = ٨$ د $٣س - ٢ص = ٨$ هـ $٤س = \frac{ص}{٤}$ ثابت التغير

ج $٣س + ٢ص = ٨$ د $٣س + ٢ص = ٨$ هـ $٤س = \frac{ص}{٤}$ ثابت التغير

د $٣س - ٢ص = ٨$ هـ $٤س = \frac{ص}{٤}$ ثابت التغير

تلك تغير طردي . ثابت التغير $\frac{١}{٤}$

مثال (٦)

البيولوجيا: تتغير كمية الدم في جسم الإنسان طرديًا مع وزنه. تبلغ كمية الدم في جسم رجل يزن ٧٥ كجم نحو ٥ لترات. أوجد ثابت التغير.

ب) اكتب معادلة تربط العلاقة بين كمية الدم والوزن.

الحل:

نفرض أن كمية الدم في جسم الانسان هي ص ووزن الجسم هو س

$$\text{أ) ثابت التغير} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\frac{1}{15} = \frac{5}{75} =$$

ب) معادلة التغير الطردي:

$$\text{ص} = \frac{1}{15} \text{س}$$

المعادلة المطلوبة:

كمية الدم = ثابت التغير × الوزن

$$\text{كمية الدم} = \frac{1}{15} \text{الوزن.}$$

حاول أن تحل ^{١١٥}الوزن ٥ كجم كمية الدم = $\frac{1}{15} \times 5 = 2$ لترات تقريبًا.

٤) السؤال المفتوح: قدر كمية الدم في جسمك مستخدمًا مثال (٦).

التعبير عن التغير الطردي

في التغير الطردي تكون النسبة $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ثابتة لكل زوج مرتب حيث $\text{س} \neq 0$ في جميع الحالات. وبالتالي يمكن التعبير عن التغير الطردي باستخدام التناسب.

فيكون: $\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2}{\text{س}_2} = \dots$ لجميع الأزواج المرتبة (س_١، ص_١)، (س_٢، ص_٢)، ...

حيث $\text{س}_1 \neq 0$ ، $\text{س}_2 \neq 0$ ، ...

وكل من هذه النسب تساوي ثابت التغير ك. (معدل التغير).

١١٦

مثال (٧)

بين ما إذا كانت ص تتغير طرديًا مع س في كل من بيانات الجدولين أ، ب. اكتب معادلة التغير في حالة التغير الطردي.
الحل:

س	٣	١	٤
ص	٢,٢٥	٠,٧٥	٣
ص/س	٠,٧٥	٠,٧٥	٠,٧٥

ب

س	٢	٤	٦
ص	١	١	٣
ص/س	٠,٥	٠,٢٥	٠,٥

أ

• الجدول ب يمثل تغيرًا طرديًا حيث ثابت التغير يساوي ٠,٧٥. معادلة التغير هي ص = ٠,٧٥ س.

• الجدول أ لا يمثل تغيرًا طرديًا لأن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة لكل البيانات.

حاول أن تحل ١١٦

٥ هل تتغير ص طرديًا مع س في الجدول:

س	١	١	٣	٣
ص	٣	١	٥	٥

لا يمثل تغيرًا طرديًا لأن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة لكل البيانات.

مثال (٨)

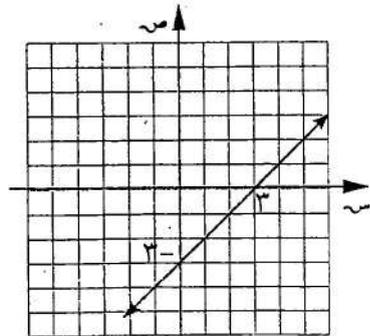
تفكير ناقد: هل كل معادلة خط مستقيم تعبر عن تغير طردي؟ فسر إجابتك.

الحل: لا. ليست كل معادلة خط مستقيم تعبر عن تغير طردي.

معادلة التغير الطردي تكون بالصورة ص = ك س، أي تمر بنقطة الأصل.

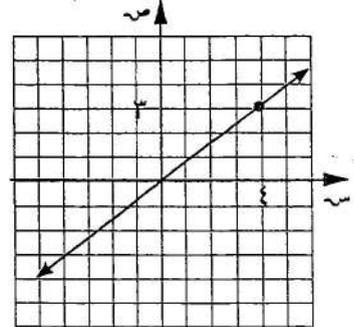
مثلاً: البيانات في الشكل (أ) تمثل بالمعادلة ص = ٠,٧٥ س، وهي معادلة تغير طردي، لأنها بالصورة ص = ك س بينما

البيانات في الشكل (ب) تمثل بالمعادلة ص = س - ٣ وهي ليست بالصورة ص = ك س.



(ب)

معادلة خط مستقيم لا تمثل تغيرًا طرديًا



(أ)

معادلة خط مستقيم تمثل تغيرًا طرديًا

مثال (٩) تطبيقات حياتية

معلومة فيزيائية:

من قوانين الحركة: الوزن هو كمية فيزيائية لها نفس وحدة القوة (نيوتن) وهي ناتجة من تأثير عجلة الجاذبية الأرضية على كتلة الجسم أي وزن ١ كجم = ١٠ نيوتن

الفيزياء: القوة التي تستخدمها لرفع جسم تتغير طردياً مع وزن الجسم. فأنت تحتاج إلى استخدام قوة قدرها ٢٧٥,٠ نيوتن لتتمكن إحدى المعدات من رفع جسم وزنه ١٢ نيوتن. أوجد مقدار القوة اللازم استخدامه في هذه الآلة لرفع جسم وزنه ٤٥ نيوتن.

الحل:

لنرمز إلى القوة بالرمز U ، وإلى وزن الجسم بالرمز W . $U \propto W$ و

$$\frac{U_1}{W_1} = \frac{U_2}{W_2}$$

$$\frac{U}{12} = \frac{275}{45}$$

$$U \times 45 = 12 \times 275$$

$$U = \frac{12 \times 275}{45} = 36$$

أي أنك تحتاج إلى كيلوجرام تقريباً لرفع ٤٥ نيوتن.

$$U = 36 \text{ نيوتن}$$

$$W = 36 \times 0,2291 = 8,2 \text{ كجم}$$

$$W = 36 \times 0,2291 = 8,2 \text{ كجم}$$

$$\begin{aligned} W &= 36 \text{ نيوتن} \\ W &= 36 \times 0,2291 \\ W &= 8,2 \text{ كجم} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

١١٧

٦) اكتب معادلة التغير الطردي للمثال السابق، واستخدمها لإيجاد الوزن الذي يمكن أن ترفعه باستخدام

قوة قدرها ٤,٣ نيوتن في الرافعة نفسها.

التغير العكسي

ص ١٤

مثال (٢)

منطقة مستطيل مساحتها ٢٤ سم^٢، وطولها س سم، وعرضها ص سم. إذا كان كل من س، ص أعدادًا كلية، فأوجد القيم الممكنة لـ س، ص ثم حدد نوع التغير الذي يمثل هذه العلاقة.

الحل:

س	٦	٨	١٢	٢٤
ص	٤	٣	٢	١

مساحة المستطيل = س ص = ٢٤

أي س ص = ثابت ونعبر عن ذلك رياضياً:

س × ص = ك ثابت
 أي أن ص = $\frac{ك}{س}$ ، ص $\propto \frac{١}{س}$
 ∴ التغير عكسي.

حاول أن تحل

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ص	٦٠	٣٠	٢٠	١٥	١٢	١٠	٩	٨	٧	٦

بالنظر إلى الجدول أعلاه، هل س × ص يعتبر عن تغيير عكسي؟ اشرح إجابتك. نعم لأن س ص = ٦٠ ثابت.

كۆن جدولاً من س، ص على أن يكون س ص يعتبر عن تغيير عكسي.

س	١	٢	٣	٤	٦	١٢
ص	١٥	٧	٤	٣	٢	١

ملاحظة: استخدام التناسب في التعبير عن التغير العكسي. إذا كان (س_١، ص_١)، (س_٢، ص_٢) زوجين مرتبين في تغير عكسي.

ص_١ $\propto \frac{١}{س١}$ ، أي ص = $\frac{ك}{س}$ فإن

س_١ ص_١ = س_٢ ص_٢ = ك

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{ص١}{س١} = \frac{ص٢}{س٢}$

في مثال العمل التعاوني السابق نجد أن:

$$٢ \times ٨٠ = ٥ \times ٣٢$$

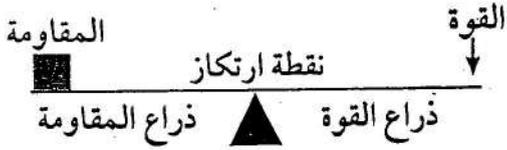
ومن ذلك نرى أن: $\frac{٣٢}{٨٠} = \frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣٢}{٥} = \frac{٨٠}{٢}$ ، $\frac{٨٠}{٣٢} = \frac{٥}{٢}$ ، ...

١٤١

مثال (٣) تطبيقات حياتية

معلومة فيزيائية: قانون الرافعة

ناتج ضرب القوة في المسافة العمودية بين نقطة تأثير القوة ونقطة الارتكاز (ذراع القوة) يساوي حاصل ضرب المقاومة في ذراع المقاومة.



الفيزياء: الوزن الذي تحتاج إليه لإحداث توازن في أرجوحة على شكل رافعة يتغير عكسيًا مع المسافة بين الوزن ونقطة الارتكاز. جاسم وزنه ٥١٠ نيوتن ويجلس على بعد ٢,٥ م من نقطة الارتكاز. أين يجلس وائل الذي وزنه ٧٥٠ نيوتن ليحدث التوازن؟

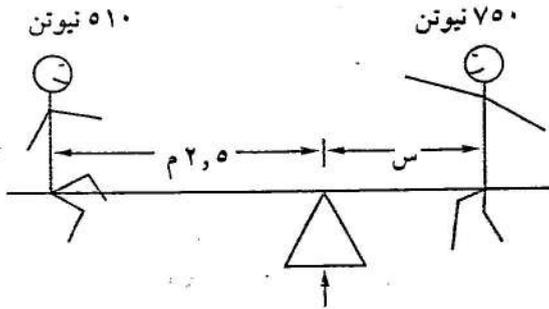
الحل: قانون الرافعة: القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

من توازن الرافعة: الوزن × المسافة = الوزن × المسافة

$$٧٥٠ \times س = ٥١٠ \times ٢,٥$$

$$س = \frac{٥١٠ \times ٢,٥}{٧٥٠} = ١,٧$$

أي أن وائل يجلس على مسافة ١,٧ م بعيدًا عن نقطة الارتكاز.



١٤١

حاول أن تحل

١) في تغير عكسي ص $\alpha = \frac{1}{س}$ إذا كانت ص = ٢, عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص = ٣.

٢) ما وزن جسم يوضع على مسافة ٣ م من نقطة ارتكاز رافعة، ليحدث توازنًا مع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على بعد ٦ م من نقطة الارتكاز؟
 $٦ \times ٤٠ = ٣ \times س$
 $س = ٨٠$ نيوتن

٣) رحلة تستغرق ٣ ساعات عندما تسير السيارة بسرعة ٧٥ كم/ساعة. كم تستغرق الرحلة إذا سارت السيارة بسرعة ٩٠ كم/ساعة.
 $٧٥ \times ٣ = ٩٠ \times س$
 $س = ٢,٥$ ساعة

حاول أن تحل

٤. بين نوع التغير المناسب للموقف في كل من الحالات التالية، ثم اكتب رقم المعادلة التي تمثله:
- (١) المبلغ الذي يأخذه كل شخص عند توزيع مبلغ ١٠٠ دينار على عدة أشخاص بالتساوي. تمكس (ج)
- (٢) تكلفة شراء عدد من الأقلام علمًا أن ثمن القلم ٢٠ فلسًا. لمرد (د)
- (٣) أنت تمشي ٥ كم كل يوم. سرعتك في المشي والزمن يتغيران من يوم إلى يوم. بكمس (ب)
- (٤) عدد من الأشخاص يشترون هدايا تذكارية سعر الواحدة ٥ دنانير. لمرد (د)
- أ = ص = ٥ س
ب = ص = ٥ س
ج = ص = $\frac{١٠٠}{س}$
د = ص = ٢٠ س

مثال (٥) تطبيقات حياتية

توفي رجل وترك لزوجته وأبنائه مبلغ ٣٤٥٠٠٠٠ دينار. (والداه متوفيان).
أوجد نصيب كل فرد إذا تألفت عائلته من:

- أ ٥ أولاد و ٤ بنات $\text{ب} ٤ أولاد و ٣ بنات$ $\text{ج} ٤ أولاد و ٣ بنات$
ولد واحد وابنتين
سورة النساء

ماذا تلاحظ؟

الحل:

للزوجة الثمن أي $\frac{١}{٨} \times ٣٤٥٠٠٠٠ = ٤٣١٢٥٠$

يبقى لأبنائه: $٣٠١٨٧٥٠ = ٣٤٥٠٠٠٠ - ٤٣١٢٥٠$

أ عدد الحصص = عدد البنات $\times \frac{١}{٤} +$ عدد الأبناء $\times ١$

$٧ = \frac{١}{٤} \times ٤ + ١ \times ٥ =$

نصيب الولد = $٣٠١٨٧٥٠ \div ٧ = ٤٣١٢٥٠$ دينارًا.

نصيب الابنة = $\frac{١}{٤} \times ٤٣١٢٥٠ = ١٠٧٨١٢٥$ دينارًا.

ب عدد الحصص = $١ \times ٤ + ٣ \times \frac{١}{٤} = \frac{١١}{٤}$

نصيب الولد = $٣٠١٨٧٥٠ \div \frac{١١}{٤} \approx ١٠٨٨٦٣,٦$ دينارًا.

نصيب الابنة = $١٠٨٨٦٣,٦ \div ٢ \approx ٥٤٤٣١,٨$ دينارًا.

ج عدد الحصص = $١ \times ١ + ٢ \times \frac{١}{٤} = ٢$

نصيب الولد = $٣٠١٨٧٥٠ \div ٢ = ١٥٠٩٣٧٥$ دينارًا.

نصيب الابنة = $١٥٠٩٣٧٥ \div ٢ = ٧٥٤٦٨٧,٥$ دينارًا.

نلاحظ أنه كلما زاد عدد الحصص قل نصيب الفرد. أي أن نصيب كل فرد من الأبناء يتغير عكسيًا مع عدد الحصص.

حاول أن تحل

هندسة: خصصت قطعنا أرض لبناء مجمعين سكنيين لهما المساحة نفسها، كل منهما على شكل مستطيل:
أبعاد القطعة الأولى ٤٢ م \times ٣٥ م، فإذا كان طول القطعة الثانية ٥٢ م فاحسب عرضها.

$٤٢ \times ٣٥ = ١٤٧٠$

$١٤٧٠ \div ٥٢ = ٢٨,٢٦٩$