الوحدة الثالثة

الجبر - التغير

((ملخص لأهم قوانين الوحدة الثالثة))

- يوجد في شكلين متشابهين أزواج من الزوايا متساوية القياس وأزواج من الأضلاع متناسبة الأطوال.
- عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر يكون المثلثان متشابهان.
- عند تطابق زاوية في مثلث مع زاوية في مثلث آخر وتناسب طولي الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين. يكون المثلثان متشابهان
- عند تناسب أطوال الأضلاع الثلاثة المتناظرة في مثلثين. يكون المثلثان متشابهين
- يقسم العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر المثلث القائم الزاوية إلى مثلثين متشابهين وكلا منهما مشابه للمثلث الأصلي.
- نظرية طاليس:
  اذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع بعضها بعضاً. فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.
- عندما يوازي مستقيم أحد أضلاع مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.
- يقسم المنصف للزاوية الداخلية في المثلث الضلع المقابل لها إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.
- اذا كانت نسبة التشابه بين مضلعين متشابهين هي $\frac{م}{ب}$ فإن:
  ① النسبة بين محيطي مضلعين = $\frac{م}{ب}$.
  ② النسبة بين مساحتي مضلعين = $\left(\frac{م}{ب}\right)^{٢}$
- نسبة التشابه بين أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

النسبة والتناسب
Ratio and Proportion

ص ١٠٠

دعنا نفكر ونتناقش

سوف تتعلم

- خواص التناسب
- تمارين وتطبيقات هندسيّة
- خواص التناسب المتسلسل

تعلم أن النسبة هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه يمكن تمثيلها بكسر.
فمثلًا: النسبة بين العدد ٣ (الحد الأول)، والعدد ٤ (الحد الثاني) هي $\frac{٣}{٤}$ ويمكن التعبير عن هذه النسبة بالصورة ٣:٤ وتُقرأ ٣ إلى ٤.

مثال (١)

تذكر:
١ كم = ١٠٠ ٠٠٠ سم

إذا كانت المسافة بين الكويت العاصمة والرياض هي ٥٥٠ كم، وكانت هذه المسافة ممثَّلةً في إحدى الخرائط بقطعة مستقيمة طولها ١١ سم. أوجد مقياس الرسم، ثم أوجد النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقيّة.

الحلّ:

مقياس الرسم = $\frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$

$= \frac{\text{١١ سم}}{\text{٥٥٠ كم}} = \frac{\text{١١ سم}}{\text{٥٥ ٠٠٠ ٠٠٠ سم}}$

حيث إن الكميتين من النوع نفسه يمكن كتابتها كنسبة بالصورة:

$\frac{١١}{٥٥ ٠٠٠ ٠٠٠}$ أو ١١ : ٥٥ ٠٠٠ ٠٠٠

أي النسبة تساوي ١ : ٥ ٠٠٠ ٠٠٠

حاول أن تحل صـ ١٠٠

(١) من مثال (١) استخدم مقياس الرسم على الخريطة لإيجاد المسافة الحقيقيّة بين الدمام والكويت العاصمة.

مقياس الرسم = $\frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}} = \frac{١}{٥٠٠٠٠٠٠} = \frac{٨}{س}$

المسافة الحقيقية = ٤٠ ٠٠٠ ٠٠٠ سم = ٤٠٠ كم

١٠٤

$$س = \frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠$$

$$س = \frac{١٣٢,٥}{٢٦٥٠} \times ١٠٠$$

$$س = ٥$$

∴ النسبة المئوية للزيادة هي ٥، أي أن الزيادة تساوي ٥٪ من الإنتاج عن العام السابق.

حاول أن تحل

② في العام ٢٠١٠، كان إنتاج المزرعة نفسها ٥٥٠٠ طنًّا من البطاطا أما في العام ٢٠١١ فكان الإنتاج ٦٣٥٠ طنًّا.

احسب النسبة المئوية لزيادة منتج البطاطا بين عامي ٢٠١٠، ٢٠١١ إلى أقرب جزء من مئة.

قيمة الزيادة = ٦٣٥٠ − ٥٥٠٠ = ٨٥٠ طن

النسبة المئوية للزيادة = $\frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠$

$= \frac{٨٥٠}{٥٥٠٠} \times ١٠٠ = ١٥,٤٥$ ٪

التناسب Proportion

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

فمثلًا: $\frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{١٥}{٢٠} = ...$

ويمكن كتابة ذلك كالآتي: ٣:٤ = ١٢:١٦ = ١٥:٢٠...

وتقرأ ٣ إلى ٤ هي نفسها ١٢ إلى ١٦ هي نفسها ١٥ إلى ٢٠...

خاصيّة التساوي:

ليكن أ، ب، جـ، د، ∈ ح*، ك ∈ ح.

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنّ $\frac{أ}{ب} \times ك = \frac{جـ}{د} \times ك$ ، $ك \times \frac{أ}{ب} = ك \times \frac{جـ}{د}$

ص ١٠١

فمثلًا:
نعلم أن $\frac{٣}{٤} = \frac{١٥}{٢٠}$ بضرب الطرفين في ٢ نجد أن:

$\frac{٣}{٤} \times ٢ = \frac{١٥}{٢٠} \times ٢$ أي أن $\frac{٣}{٢} = \frac{١٥}{١٠}$

> **تذكر:**
> ح* هي مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية
> ح* = ح - {٠}
> الرمز ∋ يقرأ ينتمي إلى

مثال (٣)

إذا كان $\frac{أ}{٩} = \frac{٥}{٦}$ فأوجد قيمة أ.

الحل: $\frac{أ}{٩} = \frac{٥}{٦}$

$١٨ \times \frac{أ}{٩} = ١٨ \times \frac{٥}{٦}$ بضرب الطرفين في ١٨ (م.م أ للعددين ٦، ٩)

٢أ = ١٥ بالتبسيط

أ = $\frac{١٥}{٢}$ بقسمة الطرفين على ٢

أ = ٧,٥

حاول أن تحل ص ١٠١

٣ إذا كان $\frac{٤}{٦} = \frac{ص}{٩}$ فأوجد قيمة ص.

ضرب الطرفين × ١٨

$١٨ \times \frac{٤}{٦} = \frac{ص}{٩} \times ١٨$

١٢ = ٢ص ص = ٦

خاصيّة الضرب التقاطعي: ص ١٠٢

ليكن أ، ب، جـ، د ∋ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أد = ب جـ

$\frac{أ}{ب} \quad \frac{جـ}{د}$

فمثلًا: $\frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$ من ذلك نجد أن:

١٢ × ٤ = ١٦ × ٣

٤٨ = ٤٨ عبارة صحيحة

مثال (٤) ص ١٠٢

أوجد قيمة ص في التناسب: $\frac{\text{ص}}{\text{٢,٥}} = -\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

الحل:

ص × ٤ = -٣ × ٢,٥ ضرب تقاطعي

٤ص = -٧,٥

ص = $-\frac{\text{٧,٥}}{\text{٤}}$ بقسمة الطرفين على ٤

ص = -١,٨٧٥

حاول أن تحل ص ١٠٢

٣ أوجد قيمة ب في التناسب: $\frac{\text{٢}}{\text{ب}} = \frac{\text{٨}}{\text{٢٠}}$

٢ × ٢٠ = ٨ × ب

ب = $\frac{\text{٢} \times \text{٢٠}}{\text{٨}}$ = ٥

تعريف:

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإنه يقال أن أ، ب، جـ، د **أعداد متناسبة.**

وإذا كانت أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

ويسمى أ، د طرفي التناسب، كما يسمى جـ، ب وسطي التناسب.

ولأنّ في هذه الحالة أد = ب جـ خاصيّة الضرب التقاطعي

فإنّ: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

مثال (٥) ص ١٠٢

أثبت أن ٤، ١,٥، ٨، ٣ أعداد متناسبة.

الحل:

تكون الاعداد ٤، ١,٥، ٨، ٣ أعدادًا متناسبة عندما تتساوى النسبتان $\frac{\text{٤}}{\text{١,٥}}$ ، $\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$

وحيث أن $\frac{\text{٤}}{\text{١,٥}} = \frac{\text{٤٠}}{\text{١٥}} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}}$

أي أن $\frac{\text{٤}}{\text{١,٥}} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}}$

∴ الأعداد متناسبة.

حاول أن تحل ص ١٠٢

٤ أثبت أن ٣,٤ ، ٧ ، ٢,٠٤ ، ٤,٢ أعداد متناسبة.

$\frac{\text{٣,٤}}{\text{٧}}$ ، $\frac{\text{٢,٠٤}}{\text{٤,٢}}$

٤,٢ × ٣,٤ = ١٤,٢٨

٢,٠٤ × ٧ = ١٤,٢٨

الأعداد متناسبة

$\frac{\text{٣,٤}}{\text{٧}} = \frac{\text{٢,٠٤}}{\text{٤,٢}}$

١٠٤

مثال (٦)

إذا كانت ﺃ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد ٢، ٥، ٧. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{\text{ﺃ} + ٣\text{ب}}{٢\text{ب} + \text{جـ}}$.

الحل:

معلومة رياضية:
إذا كانت ﺃ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد د، هـ، و، فإن: $\frac{\text{ﺃ}}{\text{د}} = \frac{\text{ب}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{و}}$.

∵ ﺃ، ب، جـ متناسبة مع ٢، ٥، ٧

∴ $\frac{\text{ﺃ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٥} = \frac{\text{جـ}}{٧} = \text{م}$

∴ ﺃ = ٢م، ب = ٥م، جـ = ٧م

∴ المقدار $\frac{\text{ﺃ}+٣\text{ب}}{٢\text{ب} + \text{جـ}} = \frac{٢\text{م} + ٣(٥\text{م})}{٢(٥\text{م}) + ٧\text{م}} = \frac{١٧\text{م}}{١٧\text{م}} = ١$

حاول أن تحل

$\frac{\text{ﺃ}}{٣} = \frac{\text{ب}}{٥} = \frac{\text{جـ}}{١١} = \text{م}$ ، ﺃ = ٣م ، ب = ٥م ، جـ = ١١م

المقدار = $\frac{٣\text{م} + ١٥\text{م}}{٢٥\text{م} + ١١\text{م}} = \frac{١٨\text{م}}{٣٦\text{م}} = \frac{١}{٢}$

٥ إذا كانت الأعداد ﺃ، ب، جـ متناسبة مع ٣، ٥، ١١. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{\text{ﺃ}+٣\text{ب}}{٥\text{ب} + \text{جـ}}$.

ص ١٠٤

مثال (٧) ص ١٠٤

تشارك سالم ومنصور بتنفيذ أعمال الدهان. إن نسبة الزمن الذي أمضياه في العمل هي ٤:٧. قبضا معًا ٨٨ دينارًا. كيف سيتوزع هذا المبلغ بينهما إذا عمل سالم فترة زمنية أطول من منصور؟

الحل: لتكن س نصيب سالم ، م نصيب منصور من المبلغ.

$\frac{\text{س}}{\text{م}} = \frac{٧}{٤}$ كتابة التناسب

$\frac{\text{س} + \text{م}}{\text{م}} = \frac{٧ + ٤}{٤}$ من خواص التناسب

$\frac{٨٨}{\text{م}} = \frac{١١}{٤}$

$\text{م} = \frac{٤ \times ٨٨}{١١} = ٣٢$

س = ٨٨ − ٣٢ = ٥٦

ينال سالم ٥٦ دينارًا، وينال منصور ٣٢ دينارًا.

حاول أن تحل ص ١٠٥

٦ في مثال (٧)، كيف سيتوزع المبلغ بين سالم ومنصور إذا كانت نسبة الزمن ٣:٥ ، إذا عمل منصور فترة زمنية أطول من سالم؟

$\frac{\text{م}}{\text{س}} = \frac{٥}{٣}$ ، $\frac{\text{س}+\text{م}}{\text{س}} = \frac{٨}{٣}$ ، $\frac{٨٨}{\text{س}} = \frac{٨}{٣}$ ينال سالم ٣٣ دينار / ومنصور ٥٥ دينار

ص ١٠٥

مثال (٨) **تطبيقات حياتية**

عند القيام بأنشطة رياضية فإن الشخص يفقد سعرات حراريّة تتناسب تقريبًا مع وزنه.

والجدول المجاور يبيّن ذلك لشخص وزنه ٦٥ كجم، عند قيامه بالنشاطات المذكورة لمدة ٦٠ دقيقة.

قام هذا الشخص بأحد هذه الأنشطة لمدة ٨٠ دقيقة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحراريّة التي يفقدها (بالتقريب).

النشاط لمدة ٦٠ دقيقة	السعرات المحروقة
المشي بسرعة ٤–٥ كم/ساعة	٣٠٠
السباحة أو التزلج	٥٠٠
لعب كرة قدم	٤٠٠

الحلّ: بفرض أن س عدد السعرات الحرارية التي يفقدها في كل نشاط

عند المشي ٦٠ دقيقة يحرق ٣٠٠ سعرة حرارية

عند المشي ٨٠ دقيقة يحرق س سعرة حرارية

أي أن $\frac{س}{٣٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$

$٦٠س = ٣٠٠ \times ٨٠$ باستخدام الضرب التقاطعي

$س = \frac{٣٠٠ \times ٨٠}{٦٠}$

س = ٤٠٠ سعرة حرارية تقريبًا

وبالمثل السباحة: $\frac{س}{٥٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$ ، س = ٦٦٧ سعرة حرارية تقريبًا.

وبالمثل كرة القدم: $\frac{س}{٤٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$ ، س = ٥٣٣ سعرة حرارية تقريبًا.

حاول أن تحل ص ١٠٥

إذا مارست رياضة كرة السلة لمدة ٢٠ دقيقة، تفقد ٣٠٠ سعرة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحرارية التي تفقدها إذا مارست هذه الرياضة لمدة ٥٠ دقيقة. $\frac{٢٠}{٥٠} = \frac{٣٠٠}{س}$ س = ٧٥٠ سعر حراري

التناسب المتسلسل الهندسي Geometric Proportion

ص ١٠٦

ليكن أ، ب، جـ ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإنّه يقال إن أ، ب، جـ في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت أ، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

ويسمى ب **الوسط المتناسب** للعددين أ، جـ أو **الوسط الهندسي** لهما كما يسمى أ، جـ **طرفي التناسب**.

فمثلًا: ٢، ٤، ٨ في تناسب متسلسل لأن $\frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٨}$.

ولاحظ أن ٨، ٤، ٢ كذلك في تناسب متسلسل لأن $\frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢}$.

إذا كان أ، ب، جـ $\in$ ح* في تناسب متسلسل فإن جـ، ب، أ في تناسب متسلسل أيضًا.

مثال (٩) ص ١٠٦

أثبت أن الأعداد ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

الحلّ:

$$\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣} ، \frac{٩}{٢٧} = \frac{٩ \div ٩}{٢٧ \div ٩} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \frac{٣}{٩} = \frac{٩}{٢٧}$$

أي أن: ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

حاول أن تحل ص ١٠٦

٨ اكتب ٣ أعداد في تناسب متسلسل. ٤، ١٦، ٦٤

مثال (١٠) ص ١٠٧

إذا كانت الأعداد ٥، س، ٢٠ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س، ثم تحقق.

الحل: نكتب التناسب المتسلسل: $\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$

$س^٢ = ١٠٠$ الضرب التقاطعي

س = ١٠ أو س = −١٠

التحقق:

س = ١٠	س = −١٠
$\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$	$\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$
$\frac{٥}{١٠} = \frac{١٠}{٢٠}$	$\frac{٥}{-١٠} = \frac{-١٠}{٢٠}$
١٠٠ = ١٠٠ ✓	١٠٠ = ١٠٠ ✓

حاول أن تحل ص ١٠٧

٩ هل يمكن إيجاد قيمة س بحيث تكون الأعداد −٩، س، ٤ في تناسب متسلسل؟ فسّر. لا

$\frac{-٩}{س} = \frac{س}{٤} \therefore س^٢ = -٣٦$ لا يمكن إيجاد قيمة

لأن $س^٢$ قيمة سالبة.

ص ١٠٧

Properties of Chaine Proportion

خواص التناسب المتسلسل

خاصيّة (١)

ليكن أ، ب، جـ $\in$ ح*

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ (أي أن أ، ب، جـ في تناسب متسلسل)

فإن ب^{٢} = أجـ وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

فمثلًا: في حالة ٣، ٩، ٢٧ نجد أن:

٣ × ٢٧ = (٩)^{٢} (كل من الطرفين يساوي ٨١)

خاصيّة (٢) ص ١٠٨

ليكن أ، ب، جـ، د $\in$ ح*

إذا كان:

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ (أي أن أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل)

فإن:

جـ = د × م، ب = د × م^{٢}، أ = د × م^{٣}

فمثلًا: في حالة $\frac{١٦}{٨} = \frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢} = ٢$ نجد أن:

٤ = ٢ × ٢، ٨ = ٢ × (٢)^{٢}، ١٦ = ٢ × (٢)^{٣}

مثال (١) ص ١٠٨

إذا كانت الأعداد ٦، س، ٥٤، ١٦٢ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

الحل:

$\because$ الأعداد في تناسب متسلسل

$\therefore \frac{٦}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{٥٤} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

$\therefore \frac{٦}{\text{س}} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

س × ٥٤ = ٦ × ١٦٢ الضرب التقاطعي

$\text{س} = \frac{٦ \times ١٦٢}{٥٤} = ١٨$

قيمة س = ١٨

$\frac{٤}{\text{س}-٢} = \frac{\text{س}-٢}{١} = \frac{١}{٢}$

٢س − ٤ = ١

٢س = ٥

س = $\frac{٥}{٢}$ = ٢,٥

حاول أن تحل ص ١٠٨

١ إذا كانت الأعداد ٤، س − ٢، ١، $\frac{١}{٢}$ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

مثال (١٢) إثرائي ص ١٠٩

إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل، فأثبت أن $\frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{ب + جـ + د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

الحل:

$\because$ أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل

$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ تناسب متسلسل

$\therefore$ جـ = د × م ، ب = د × م^2 ، أ = د × م^3

$$\frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{ب + جـ + د}} = \frac{\text{د}\text{م}^3 + \text{د}\text{م}^2 + \text{د}\text{م}}{\text{د}\text{م}^2 + \text{د}\text{م} + \text{د}} = \frac{\text{د}\text{م}(\text{م}^2 + \text{م} + 1)}{\text{د}(\text{م}^2 + \text{م} + 1)} = \text{م} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

حل آخر: من التناسب السابق أ = ب م، ب = جـ م، جـ = د م

$$\frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{ب + جـ + د}} = \frac{\text{ب م + جـ م + د م}}{\text{ب + جـ + د}} = \frac{\text{م(ب + جـ + د)}}{\text{ب + جـ + د}} = \text{م} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

حاول أن تحل ص ١٠٩

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$ أ = ب م ب = جـ م

(١٢) إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{\text{أ + ٣ب}}{\text{ب + ٣جـ}} = \frac{\text{أ − ٢ب}}{\text{ب − ٢جـ}}$ (بشرط المقام ≠ ٠)

الأيمن = $\frac{\text{أ + ٣ب}}{\text{ب + ٣جـ}} = \frac{\text{ب م + ٣جـ م}}{\text{ب + ٣جـ}} = \frac{\text{م(ب + ٣جـ)}}{\text{(ب + ٣جـ)}} = \text{م}$

الأيسر = $\frac{\text{أ − ٢ب}}{\text{ب − ٢جـ}} = \frac{\text{ب م − ٢ب}}{\text{جـ م − ٢جـ}} = \frac{\text{ب (م − ٢)}}{\text{جـ (م − ٢)}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$

الطرفان متساويان.

٣ - ٢ -

التغير الطردي ص ١١٤

مثال (١) ص ١١٢

إذا كانت ص α س وكانت ص = ٣٠ عندما س = ١٠، فأوجد قيمة ص عندما س = ٤٠، ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

الحل: ∴ ص α س

∴ ص = ك س   ك ثابت التغير

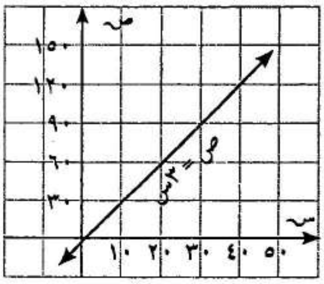
∴ ٣٠ = ك × ١٠

ك = ٣

∴ ص = ٣ س

عندما س = ٤٠ تكون ص = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

س	٠	١٠	٤٠
ص = ٣س	٠	٣٠	١٢٠



حاول أن تحل ص ١١٢

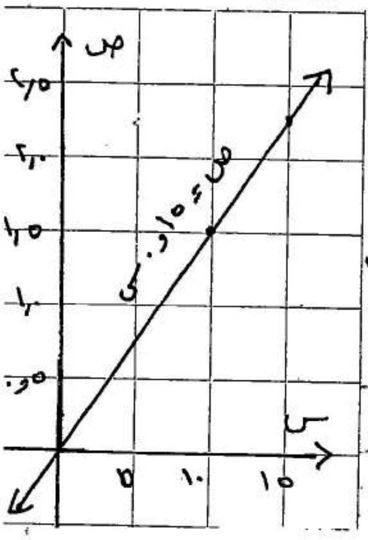
١) إذا كانت ص α س وكانت ص = ١,٥ عندما س = ١٠، أوجد قيمة ص عندما س = ١٥ ثم مثّل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

عندما س = ١٥ ص = ٢,٢٥

ص = ك س ، ١,٥ = ك × ١٠ ، ك = ٠,١٥

$\boxed{\text{ص} = ٠,١٥ \text{س}}$

س	٠	١٠	١٥
ص	٠	١,٥	٢,٢٥



مثال (٢)

في إحدى المناطق ترتفع درجة الحرارة بانتظام خلال النهار بمعدل ٣° في الساعة. اكتب معادلة تغيّر طردي تمثل هذا الارتفاع.

الحل:

∵ درجة الحرارة ترتفع بانتظام

∴ معدل التغيير = ٣

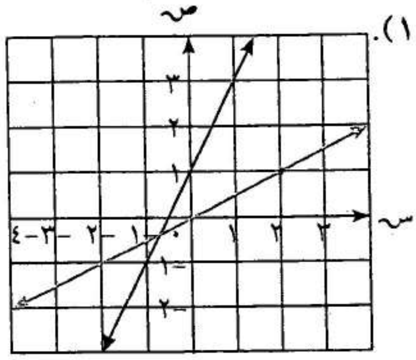
المعادلة هي ص = ٣س   حيث ص درجة الحرارة، س عدد الساعات.

ص ١١٣

مثال (٣)

في الشكل المقابل، أي من المستقيمين يمثل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

الحل:



المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل يمثل تغيّرًا طرديًّا بين س، ص وهو يمر بالنقطة (٢، ١).

ثابت التغير = $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{١}{٢}$

المستقيم الثاني لا يمر بنقطة الأصل فهو لا يمثّل تغيّرًا طرديًّا.

حاول أن تحل ص ١١٣

(٢) هل المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ (٢، ٣)، ب (٤، ٦) يمثل تغيّرًا طرديًّا بين س، ص. اشرح إجابتك

نعم لأن $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ص_٢}{س_٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ تغير طردي وثابت التغير $\frac{٣}{٢}$

ص = $\frac{٣}{٢}$ س

مثال (٤)

أي من المعادلتين التاليتين تمثّل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

أ ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

ب ٥س + ٢ص = ٩

الحل:

أ ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

٨ص = ٢س

ص = $\frac{٢}{٨}$ س = $\frac{١}{٤}$ س على الصورة ص = ك س

هذه المعادلة تمثل تغيّرًا طرديًّا،

حيث ثابت التغيّر = $\frac{١}{٤}$

ب ٥س + ٢ص = ٩

٢ص = −٥س + ٩

ص = −$\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{٩}{٢}$ وهذه ليست على الصورة ص = ك س

إذًا هذه المعادلة لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا.

حاول أن تحل ص ١١٣

(٣) أي من المعادلات التالية تمثّل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغير الطردي.

أ ٧ص = ٢س ص = $\frac{٢}{٧}$ س تمثل تغير طردي . ثابت التغير $\frac{٢}{٧}$.

ب ٣س + ٤ص = ٨ ص = ٢ − $\frac{٣}{٤}$ س لا تمثل تغير طردي

ج ص + ٣س = ٢(س + ٢ص) ص + ٣س = ٢س + ٤ص

٣ص = س ص = $\frac{١}{٣}$ س

تمثل تغير طردي . ثابت التغير = $\frac{١}{٣}$

مثال (٦) ص ١١٥

البيولوجيا: تتغير كمية الدم في جسم الإنسان طرديًّا مع وزنه. تبلغ كمية الدم في جسم رجل يزن ٧٥ كجم نحو ٥ ليترات.

أ أوجد ثابت التغيّر.

ب اكتب معادلة تربط العلاقة بين كمية الدم والوزن.

الحل:

نفرض أن كمية الدم في جسم الانسان هي ص وزن الجسم هو س

أ ثاتب التغيّر = $\frac{ص}{س}$

$= \frac{٥}{٧٥} = \frac{١}{١٥}$

ب معادلة التغيّر الطردي:

ص = $\frac{١}{١٥}$ س

المعادلة المطلوبة:

كمية الدم = ثابت التغير × الوزن

كمية الدم = $\frac{١}{١٥}$ الوزن.

حاول أن تحل ص ١١٥ الوزن ٤٥ كجم كمية الدم = $\frac{١}{١٥}$ × ٤٥ = ٣ ليترات تقريباً .

٤ السؤال المفتوح: قدّر كمية الدم في جسمك مستخدما مثال (٦).

التعبير عن التغير الطردي

في التغيّر الطرديّ تكون النسبة $\frac{ص}{س}$ ثابتة لكل زوج مرتّب حيث س ≠ ٠ في جميع الحالات. وبالتالي يمكن التعبير عن التغيّر الطرديّ باستخدام التناسب.

فيكون: $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$ ... لجميع الأزواج المرتبة (س$_١$، ص$_١$)، (س$_٢$، ص$_٢$) ، ...

حيث س$_١$ ≠ ٠، س$_٢$ ≠ ٠ ، ...

وكل من هذه النسب تساوي ثابت التغيّر ك.(معدل التغير).

ص ١١٦

مثال (٧)

بيّن ما إذا كانت ص تتغيّر طرديًّا مع س في كل من بيانات الجدولين أ، ب. اكتب معادلة التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

الحل:

أ

س	٢	٤	٦
ص	١	١	٣
$\frac{ص}{س}$	٠,٥	٠,٢٥	٠,٥

ب

س	٣	١	٤
ص	٢,٢٥	٠,٧٥	٣
$\frac{ص}{س}$	٠,٧٥	٠,٧٥	٠,٧٥

• الجدول أ لا يمثّل تغيّرًا طرديًّا لأن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة لكل البيانات.

• الجدول ب يمثّل تغيّرًا طرديًّا حيث ثابت التغيّر يساوي ٠,٧٥. معادلة التغيّر هي ص = ٠,٧٥ س.

حاول أن تحل ص ١١٦

(٥) هل تتغيّر ص طرديًّا مع س في الجدول:

س	١	١-	٢	٣-
ص	٣	١-	٥	٥-
$\frac{ص}{س}$	٣	١	$\frac{٥}{٢}$	$\frac{٥}{٣}$

لا يمثل تغيراً طردياً لأن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة لكل البيانات

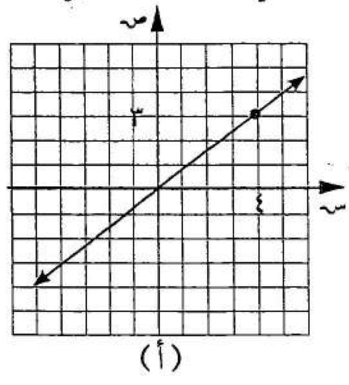
مثال (٨)

تفكير ناقد: هل كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديٍّ؟ فسر إجابتك.

الحل: لا: ليست كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديّ.

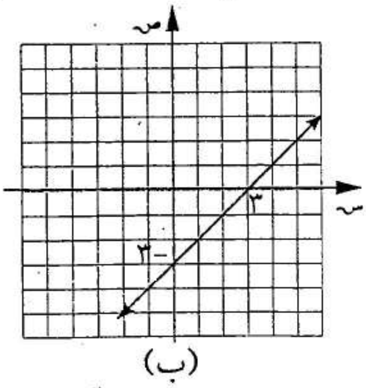
معادلة التغيّر الطرديّ تكون بالصورة ص = ك س، أي تمر بنقطة الأصل.

مثلًا: البيانات في الشكل (أ) تمثّل بالمعادلة ص = ٠,٧٥ س، وهي معادلة تغيّر طرديّ، لأنها بالصورة ص = ك س بينما البيانات في الشكل (ب) تمثّل بالمعادلة ص = س − ٣ وهي ليست بالصورة ص = ك س.



(أ)

معادلة خط مستقيم تمثّل تغيّرًا طرديًّا



(ب)

معادلة خط مسقيم لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا

١١٧ ص

مثال (٩) تطبيقات حياتية

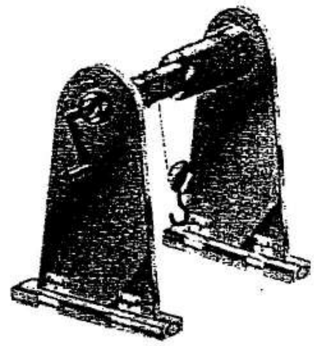
الفيزياء: القوة التي تستخدمها لرفع جسم تتغيّر طرديًّا مع وزن الجسم.

فأنت تحتاج إلى استخدام قوة قدرها ٠,٢٧٥ نيوتن لتتمكن إحدى المعدات من رفع جسم وزنه ١٢ نيوتن. أوجد مقدار القوة اللازم استخدامه في هذه الآلة لرفع جسم وزنه ٤٥ نيوتن.

> **معلومة فيزيائية:**
> من قوانين الحركة : الوزن هو كمية فيزيائية لها نفس وحدة القوة (نيوتن) وهي ناتجة من تأثير عجلة الجاذبية الارضية على كتلة الجسم أي وزن ١ كجم = ١٠ نيوتن

الحل:

لنرمز إلى القوة بالرمز ق، وإلى وزن الجسم بالرمز و.



$\because$ ق α و

$\therefore \frac{ق_١}{و_١} = \frac{ق_٢}{و_٢}$

$\frac{ق_٢}{٤٥} = \frac{٠,٢٧٥}{١٢}$

$ق_٢ \times ١٢ = ٠,٢٧٥ \times ٤٥$

$ق_٢ = \frac{٠,٢٧٥ \times ٤٥}{١٢} = ١,٠٣١٢٥$ نيوتن

أي أنك تحتاج إلى كيلوجرام تقريبًا لرفع ٤٥ نيوتن.

حاول أن تحل ص ١١٧

ص = ل س

٠,٢٧٥ = ل × ١٢

ل = ٠,٠٢٢٩١

ص = ٠,٠٢٢٩١ س

٤,٣ = ٠,٠٢٢٩١ × س

س = ١٨٧,٦٩١ نيوتن

(٦) اكتب معادلة التغيّر الطردي للمثال السابق، واستخدمها لإيجاد الوزن الذي يمكن أن ترفعه باستخدام قوّة قدرها ٤,٣ نيوتن في الرافعة نفسها.

- ١٠٥ -

التغير العكسي

ص ١٢٠

مثال (٢)

منطقة مستطيل مساحتها ٢٤ سم^{٢}، وطولها س سم، وعرضها ص سم. إذا كان كل من س، ص أعدادًا كلية، فأوجد القيم الممكنة لـ س، ص ثم حدد نوع التغير الذي يمثل هذه العلاقة.

الحل:

س	٢٤	١٢	٨	٦
ص	١	٢	٣	٤

مساحة المستطيل = س ص = ٢٤

أي س ص = ثابت ونعبر عن ذلك رياضيًا:

س × ص = ك   ك ثابت

أي أن ص = $\frac{ك}{س}$ ، ص α $\frac{١}{س}$

∴ التغير عكسي.

حاول أن تحل

١

س	٢	٣	٤	٥	٦	١٠
ص	٣٠	٢٠	١٥	١٢	١٠	٦
س×ص	٦٠	٦٠	٦٠	٦٠	٦٠	٦٠

بالنظر إلى الجدول أعلاه، هل س × ص يعبّر عن تغيير عكسي؟ اشرح إجابتك. نعم لأن س×ص = ٦٠ ثابت .

٢ كوّن جدولًا من س، ص على أن يكون س ص يعبّر عن تغيير عكسي.

س	١	٢	٣	٤	٦	١٢
ص	١٢	٦	٤	٢	٢	١

ملاحظة: استخدام التناسب في التعبير عن التغيّر العكسي.

إذا كان (س$_{١}$، ص$_{١}$)، (س$_{٢}$، ص$_{٢}$) زوجين مرتبين في تغيّر عكسي.

ص α $\frac{١}{س}$ ، أي ص = $\frac{ك}{س}$ فإنّ

س$_{١}$ ص$_{١}$ = س$_{٢}$ ص$_{٢}$ = ك

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{ص_{١}}{ص_{٢}} = \frac{س_{٢}}{س_{١}}$

في مثال العمل التعاوني السابق نجد أن:

٣٢ × ٥ = ٨٠ × ٢

ومن ذلك نرى أن: $\frac{٥}{٢} = \frac{٨٠}{٣٢}$ ، $\frac{٨٠}{٥} = \frac{٣٢}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥} = \frac{٣٢}{٨٠}$ ، …

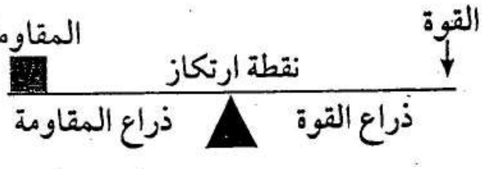
ص ١٢١

مثال (٣) تطبيقات حياتية

الفيزياء: الوزن الذي تحتاج إليه لإحداث توازن في أرجوحة على شكل رافعة يتغيّر عكسيًّا مع المسافة بين الوزن ونقطة الارتكاز. جاسم وزنه ٥١٠ نيوتن ويجلس على بعد ٢,٥ م من نقطة الارتكاز. أين يجلس وائل الذي وزنه ٧٥٠ نيوتن ليحدث التوازن؟

معلومة فيزيائية: قانون الرافعة

ناتج ضرب القوة في المسافة العمودية بين نقطة تأثير القوة ونقطة الارتكاز (ذراع القوة) يساوي حاصل ضرب المقاومة في ذراع المقاومة.



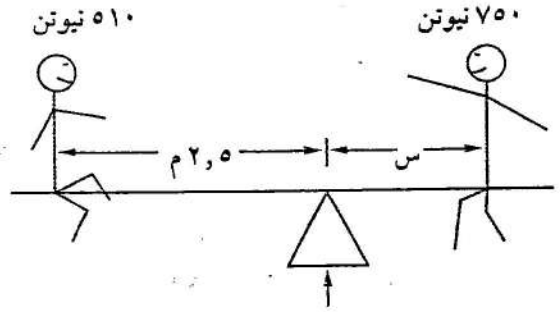
الحل: قانون الرافعة : القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

من توازن الرافعة: الوزن$_1$ × المسافة$_1$ = الوزن$_2$ × المسافة$_2$

$$٥١٠ \times ٢,٥ = ٧٥٠ \times س$$

$$س = \frac{٥١٠ \times ٢,٥}{٧٥٠} = ١,٧$$

أي أن وائل يجلس على مسافة ١,٧ م بعيدًا عن نقطة الارتكاز.



ص ١٢١

حاول أن تحل

٢, ٠ × ٠,٧٥ = ٣ × س ∴ س = ٠,٠٥

(٣) أ في تغيّر عكسي ص $\alpha \frac{1}{س}$ إذا كانت ص = ٢,٠ عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص = ٣.

ب ما وزن جسم يوضع على مسافة ٣ م من نقطة ارتكاز رافعة، ليحدث توازنًا مع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على بعد ٦ م من نقطة الارتكاز؟

س × ٣ = ٤٠ × ٦ س = ٨٠ نيوتن

ج رحلة تستغرق ٣ ساعات عندما تسير السيارة بسرعة ٧٥ كم/ ساعة. كم تستغرق الرحلة إذا سارت السيارة بسرعة ٩٠ كم/ ساعة.

٣ × ٧٥ = ٩٠ × س

س = ٢,٥ ساعة

ص ١٢٣

حاول أن تحل

٤ بيّن نوع التغيّر المناسب للموقف في كل من الحالات التالية، ثم اكتب رقم المعادلة التي تمثله: عكسي (ج)

(١) المبلغ الذي يأخذه كل شخص عند توزيع مبلغ ١٠٠ دينار على عدة أشخاص بالتساوي.

(٢) تكلفة شراء عدد من الأقلام علمًا أن ثمن القلم ٢٠ فلسًا. طردي (د)

(٣) أنت تمشي ٥ كم كل يوم. سرعتك في المشي والزمن يتغيّران من يوم إلى يوم. عكسي (ب)

(٤) عدد من الأشخاص يشترون هدايا تذكارية سعر الواحدة ٥ دنانير. طردي (أ)

أ ص = ٥س

ب س ص = ٥

ج ص = $\frac{١٠٠}{س}$

د ص = ٢٠ س

مثال (٥) تطبيقات حياتية

توفي رجل وترك لزوجته وأبنائه مبلغ ٠٠٠ ٤٥٠ ٣ دينار. (والداه متوفيان).

أوجد نصيب كل فرد إذا تألفت عائلته من:

أ ٥ أولاد و٤ بنات ب ٤ أولاد و٣ بنات ج ولد واحد وابنتين

ماذا تلاحظ؟

سورة النساء

﴿ يُوصِيكُمُ اللَّهُ فِي أَوْلَادِكُمْ لِلذَّكَرِ مِثْلُ حَظِّ الْأُنثَيَيْنِ فَإِن كُنَّ نِسَاءً فَوْقَ اثْنَتَيْنِ فَلَهُنَّ ثُلُثَا مَا تَرَكَ وَإِن كَانَتْ وَاحِدَةً فَلَهَا النِّصْفُ وَلِأَبَوَيْهِ لِكُلِّ وَاحِدٍ مِّنْهُمَا السُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُ وَلَدٌ فَإِن لَّمْ يَكُن لَّهُ وَلَدٌ وَوَرِثَهُ أَبَوَاهُ فَلِأُمِّهِ الثُّلُثُ فَإِن كَانَ لَهُ إِخْوَةٌ فَلِأُمِّهِ السُّدُسُ مِن بَعْدِ وَصِيَّةٍ يُوصِي بِهَا أَوْ دَيْنٍ آبَاؤُكُمْ وَأَبْنَاؤُكُمْ لَا تَدْرُونَ أَيُّهُمْ أَقْرَبُ لَكُمْ نَفْعًا فَرِيضَةً مِّنَ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلِيمًا حَكِيمًا (١١) ﴾

الحل:

للزوجة الثمن أي $\frac{١}{٨}$ × ٠٠٠ ٤٥٠ ٣ = ٢٥٠ ٤٣١

يبقى لأبنائه: ٠٠٠ ٤٥٠ ٣ − ٢٥٠ ٤٣١ = ٧٥٠ ٠١٨ ٣

أ عدد الحصص = عدد الابناء × ١ + عدد البنات × $\frac{١}{٢}$

= ٥ × ١ + ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٧

نصيب الولد = ٧٥٠ ٠١٨ ٣ ÷ ٧ = ٢٥٠ ٤٣١ دينارًا.

نصيب الابنة = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥٠ ٤٣١ = ٦٢٥ ٢١٥ دينارًا.

ب عدد الحصص = ٤ × ١ + ٣ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١١}{٢}$

نصيب الولد = ٧٥٠ ٠١٨ ٣ ÷ $\frac{١١}{٢}$ ≃ ٥٤٨ ٨٦٣,٦ دينارًا.

نصيب الابنة = ٥٤٨ ٨٦٣,٦ ÷ ٢ ≃ ٢٧٤ ٤٣١,٨ دينارًا.

ج عدد الحصص = ١ × ١ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

نصيب الولد = ٧٥٠ ٠١٨ ٣ ÷ ٢ = ٣٧٥ ٥٠٩ ١ دينارًا.

نصيب الابنة = ٣٧٥ ٥٠٩ ١ ÷ ٢ = ٧٤٥ ٦٨٧,٥ دينارًا.

نلاحظ أنه كلما زاد عدد الحصص قل نصيب الفرد. أي أن نصيب كل فرد من الابناء يتغير عكسيًا مع عدد الحصص.

حاول أن تحل ص ١٢٣

٥ هندسة: خصصت قطعتا أرض لبناء مجمعين سكنيين لهما المساحة نفسها، كل منهما على شكل مستطيل: أبعاد القطعة الأولى ٤٢ م × ٣٥ م، فإذا كان طول القطعة الثانية ٥٢,٥ م فاحسب عرضها.

م × ٥٢,٥ = ٣٥ × ٤٢

م = ٢٨ م